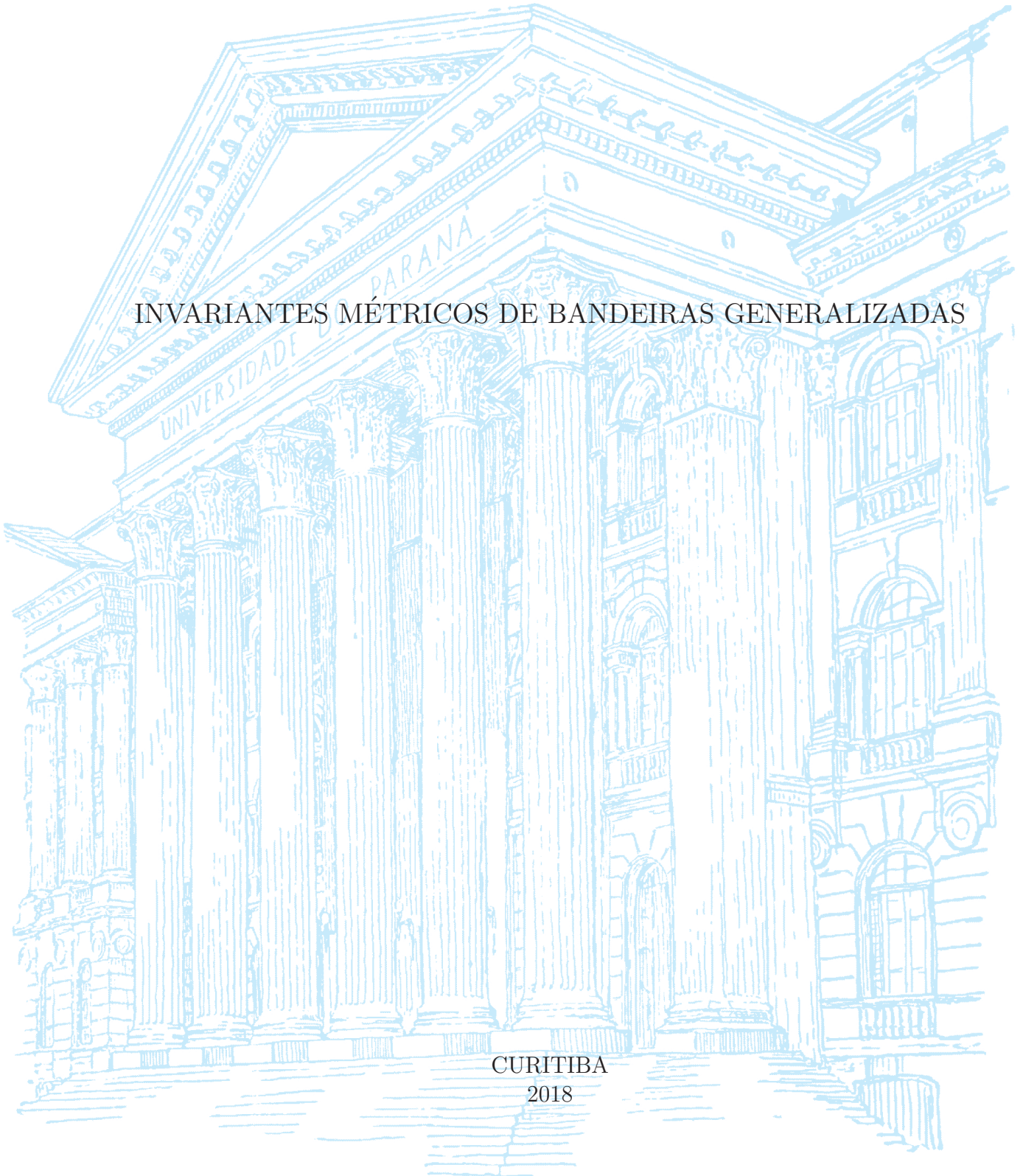


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

AURA ROSA BELZAREZ GUEDEZ

INVARIANTES MÉTRICOS DE BANDEIRAS GENERALIZADAS

CURITIBA
2018



AURA ROSA BELZAREZ GUEDEZ

INVARIANTES MÉTRICOS DE BANDEIRAS GENERALIZADAS

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutora em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández.

CURITIBA
2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

B454i

Belzareze Guedeze, Aura Rosa

Invariantes métricos de bandeiras generalizadas / Aura Rosa Belzareze Guedeze. – Curitiba, 2018.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Carlos Eduardo Durán Fernández .

1. Invariantes. 2. Invariantes diferenciais. 3. Álgebra. 4. Algoritmos. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Durán Fernández, Carlos Eduardo . III.
Título.

CDD: 518.1

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **AURA ROSA BELZAREZ GUEDEZ** intitulada: **Invariantes métricos de bandeiras generalizadas**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 31 de Agosto de 2018.

CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ
Presidente da Banca Examinadora

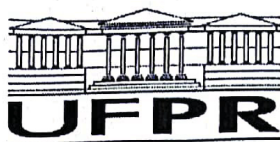
LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA
Avaliador Externo

HUGO JOSÉ LARA URDANETA
Avaliador Externo

MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Avaliador Interno

PATRICIA HESS
Avaliador Externo


JOSÉ ALBERTO RAMOS FLOR
Avaliador Interno




ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia trinta e um de agosto de dois mil e dezoito às 08:30 horas, na sala de Seminários, Departamento de Matemática, Prédio de Ciências Exatas, Centro Politécnico, Universidade Federal do Paraná, foram instalados os trabalhos de arguição da doutoranda **AURA ROSA BELZAREZ GUEDEZ** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **Invariantes métricos de bandeiras generalizadas**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ (UFPR), LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA (UNICAMP), HUGO JOSÉ LARA URDANETA (UFSC), MARCELO MUNIZ SILVA ALVES (UFPR), PATRICIA HESS (UTFPR), JOSÉ ALBERTO RAMOS FLOR (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra a discente, para que a mesma expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. A aluna respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, reuniu-se e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela Aprovação da aluna. A doutoranda foi convidada a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 31 de Agosto de 2018.


CARLOS EDUARDO DURAN FERNANDEZ
Presidente da Banca Examinadora


LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA
Avaliador Externo


HUGO JOSÉ LARA URDANETA
Avaliador Externo


MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Avaliador Interno


PATRICIA HESS
Avaliador Externo


JOSÉ ALBERTO RAMOS FLOR
Avaliador Interno

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, saúde, capacitação e força para continuar.

Aos meus pais Teresa e Baudilio, aos meus irmãos José e Génesis pela compreensão, apoio e cada um dos telefonemas.

Às minhas avós Aura e Manuela (cucu) pelo carinho e pelos mimos.

Aos meus sobrinhos Abner, Mateo, Santhiago e Fabrizio por encher meu coração de alegria e doçura.

Ao meu esposo Elvis pelo amor incondicional, os dias de estudo, por me dar um abraço e secar minhas lágrimas sempre que precisei e por me ajudar com todos os desenhos desta tese.

Ao resto da minha família que tanto me incentivaram e apoiaram ao longo deste caminho.

Ao meu orientador Carlos Durán pela dedicação, tempo e esforço neste trabalho e pela ajuda quando cheguei ao Brasil.

À minha orientadora da graduação Mireya Bracamonte por me preparar para o próximo passo.

Ao professor Rómulo Castillo pelo incentivo e pela ajuda para vir ao Brasil e aos professores do departamento de matemática da UFPR pelo tempo e pela ajuda, e pelos conhecimentos transmitidos ao longo da minha formação.

Aos membros da banca, professores Lino Grama, Hugo Lara, Marcelo Muniz, Patricia Hess e José Alberto Ramos por aceitarem o convite e pelas correções para melhorar o presente trabalho.

Aos meus amigos da Venezuela, do Brasil e aos não brasileiros que conheci no Brasil ao longo deste período. Em especial, Leonardo, Dion, Diego, Priscila, Caio, Oscar, Marcos, Ariel, Patricia, Oranys, Nico, Elias, Maria, Andrés, Yuli, Javier e Bea. pela ajuda sempre que precisei.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR pela oportunidade e formação de excelência.

E finalmente, mas não menos importante, à CAPES pelo apoio financeiro.

“ São as nossas escolhas que revelam o que realmente somos, muito mais do que as nossas qualidades.”

J. K. Rowling

RESUMO

O objetivo desta Tese é o estudo de invariantes métricos de bandeiras generalizadas, as quais são o quociente dos grupos unitários de uma álgebra e uma subálgebra. Ferramentas gerais são construídas para fornecer um caminho para calcular alguns desses invariantes, a saber, o diâmetro e os pontos antipodais. A relação destas ferramentas com problemas clássicos de álgebra linear e otimização não linear, não suave, não estritamente-convexa é enfatizada. Calculamos o diâmetro para casos de dimensão finita nos quais a subálgebra é abeliana; esses casos incluem as bandeiras completas de subespaços mutuamente ortogonais em \mathbb{C}^n .

Palavras-chave: invariantes métricos. Bandeiras generalizadas.

ABSTRACT

The object of this Thesis is the study of the metric invariants of generalized flags, which are the quotients of the unitary groups of an algebra and a subalgebra. General tools are built to give a path to compute some of these invariants, namely the diameter and antipodal points. The relationship of these tools with classical linear algebra problems and non-linear, non-smooth, non-strictly-convex optimization is emphasized. We compute the diameter for finite dimensional cases in which the subalgebra is abelian; these cases include the full flags of mutually orthogonal subspaces in \mathbb{C}^n .

Keywords: metric invariants. Generalized flags.

Sumário

Introdução	11
1 Noções de álgebras-C^* e bandeiras generalizadas	14
1.1 Álgebras- C^*	14
1.1.1 Definições e teoremas fundamentais	14
1.1.2 Álgebras- C^* e suas subálgebras em dimensão finita	15
1.2 Bandeiras generalizadas	17
1.2.1 Bandeiras generalizadas como conjunto	17
1.2.2 Bandeiras generalizadas como espaços de comprimento	19
2 Curvas de comprimento mínimo em bandeiras generalizadas	21
2.1 Geodésicas em bandeiras generalizadas	21
2.1.1 Existência de geodésicas	22
2.2 Resultados infinitesimais em dimensão três e quatro	23
2.2.1 Matrizes mínimas 3×3	23
2.2.2 Descrição do conjunto de matrizes mínimas	25
2.2.3 Matrizes mínimas 3×3 para a classe $[M]$	26
3 Diâmetro de bandeiras generalizadas	29
3.1 Redução do problema do diâmetro a um problema de max-min	29
3.1.1 Projeções que reduzem normas	29
3.1.2 Distância entre dois pontos vs. distância entre duas fibras	30
3.1.3 Distâncias em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$	30
3.1.4 O diâmetro como um problema de max-min	31
3.1.5 Uma condição de minimalidade nas fibras	32
3.2 Pontos de mínimo nas fibras para as bandeiras completas em \mathbb{C}^3	33
3.2.1 Pontos críticos regulares e o diâmetro	34
3.2.2 Princípio de máxima simetria	36
3.3 Diâmetro de bandeiras completas e bandeiras abelianas	40
3.4 Projeções notáveis de $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$	41
4 O problema do diâmetro como problema de otimização	44
4.1 Gradiente da função norma de matrizes	44
4.2 Falta de regularidade da função objetivo	45
4.3 Algoritmo para estimar o diâmetro	46
4.4 Estimativa do erro	47
Referências Bibliográficas	48

A	Teoremas fundamentais de álgebras-C^*	50
A.1	Operadores limitados em espaços de Hilbert e álgebras involutivas	50
A.2	Álgebras de operadores	51
A.2.1	Álgebras- C^* de operadores	52
A.2.2	Álgebras de Von Neumann	52
A.3	Álgebras de operadores com identidade em espaços de dimensão finita	55
A.4	Álgebras- C^* abstratas e cálculo funcional	58
A.4.1	Definições e primeiros exemplos	58
A.4.2	Espectro de um elemento em uma álgebra de Banach	59
A.4.3	Espectro de um elemento em uma álgebra- C^*	63
A.4.4	Teorema de Gelfand-Naimark	65
A.4.5	Elementos positivos de álgebras- C^*	68
A.5	Estados e construção GNS	70
A.5.1	Estados	70
A.5.2	Construção GNS	72
B	Curvas mínimas em espaços associados às álgebras-C^*	74
B.1	Bandeiras generalizadas	74
B.1.1	Representações de Grassmann e reflexões isotrópicas	74
B.2	Funções que reduzem comprimento	74
B.3	Condições geométricas para minimalidade	76
B.3.1	Condições de minimalidade para uma representação de Grassmann dada . . .	76
B.3.2	Uma condição geométrica alternativa suficiente para minimalidade	79
B.4	O teorema de minimalidade	79
B.5	Existência de curvas mínimas com velocidade inicial dada	82

Introdução

Esta Tese está inserida na *Teoria Geométrica de Representações de Álgebras- C^** , que consiste em associar a cada par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ de álgebras- C^* com identidade, um espaço homogêneo $\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ que chamamos de *bandeira generalizada*, e que é definido como o quociente dos grupos unitários $\mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$, nos moldes dos artigos [9, 10] e os artigos contidos neles. Dado que os resultados obtidos estão principalmente em dimensão finita, o leitor pode pensar na álgebra das matrizes complexas $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ (munida com a norma de operador e a involução da transposta conjugada) como exemplo paradigmático de álgebra- C^* , e seu grupo unitário é simplesmente o grupo $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ das matrizes unitárias complexas. Como exemplo de par então podemos considerar $(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \Delta)$, onde Δ é subálgebra das matrizes diagonais. A bandeira generalizada correspondente

$$\mathcal{P}_{(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \Delta)} = \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))/\text{matrizes diagonais unitárias}$$

pode ser identificada como o espaço \mathcal{F}_n das *bandeiras completas* em \mathbb{C}^n , isto é, o conjunto de todas as possíveis decomposições $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ em espaços não triviais unidimensionais mutuamente ortogonais, e corresponde ao quociente do grupo unitário $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ dividido pelo subgrupo de matrizes diagonais. Daremos uma descrição mais precisa das bandeiras generalizadas na seção 1.2.

A estrutura C^* do par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ induz na bandeira generalizada $\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ associada estruturas geométricas muito ricas. Dentro destas, a mais estudada até agora é a estrutura de *espaço de comprimento*, que é um espaço métrico onde a distância coincide com o ínfimo do comprimento das curvas unindo pontos dados. Num espaço de comprimento podemos falar de *geodésicas* -curvas que realizam este ínfimo- e todos os invariantes naturais de espaço métrico, o primeiro dos quais é o seu diâmetro.

Assim, a questão geral que motiva esta Tese é a seguinte:

Qual é a relação entre os invariantes C^ do par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e os invariantes geométricos da sua bandeira associada $\mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$?*

O estudo da geometria de bandeiras generalizadas tem se concentrado na descrição das geodésicas e problemas associados [1, 9, 10]; mas muito pouco é conhecido em relação aos *invariantes* geométricos de bandeiras generalizadas. É conhecido que o diâmetro é sempre maior ou igual a $\pi/2$ [9, 10], e para álgebras com condições razoáveis de compacidade, é menor ou igual a π [10]. As variedades de Grassmann consideradas como bandeiras generalizadas atingem o limite inferior do diâmetro $\pi/2$ [15], e em [9] também foi calculado o diâmetro de “toros”, que são bandeiras generalizadas de dimensão finita com \mathcal{A} abeliana.

Descrevemos a seguir os resultados obtidos:

Teorema 1. *O diâmetro da bandeira completa \mathcal{F}_3 é $\frac{2\pi}{3}$. Módulo homogeneidade, o diâmetro é atingido exatamente em dois pares de pontos.*

O processo de chegar a este resultado foi bastante complexo; várias tentativas de solução não forneceram o diâmetro, porém produziram ferramentas que podem ser usadas em problemas mais gerais e relações com problemas de álgebra linear clássica. A ferramenta técnica principal é a solução de um problema de max-min onde a “função objetivo” é o maior dos autovalores de famílias de matrizes simétricas positivas, ou “problema de norma de operador relativo”. Mais concretamente, o problema de cálculo do diâmetro de bandeiras completas pode ser traduzido em calcular

$$\max_{u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))} \left(\min_{\delta \text{ diagonal}} (\max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ é autovalor de } (\mathbb{1} - u\delta)(\mathbb{1} - u\delta)^*\}) \right),$$

onde $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade de $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$. Este problema de max-min leva a problemas de álgebra linear clássica de alta complexidade, devido a que, com exceção do determinante, os invariantes espectrais de uma matriz não são bem comportados em relação ao produto de matrizes. No caso de dimensão três, o estágio até o mínimo do problema acima se transforma no seguinte problema com vínculos:

Problema. Dado $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ fixo, maximizar, como uma função de b no conjunto de matrizes diagonais, $\mathbf{Re}(\mathrm{tr}(ub) - \det(ub))$ sujeito à restrição $\mathbf{Im}(\mathrm{tr}(ub) - \det(ub)) = 0$.

E vemos que tanto a função objetivo quanto o vínculo fatoram pela projeção $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3 \times S^1$ de uma matriz unitária sobre sua diagonal e determinante. Assim, o natural é tentar resolver o problema acima na imagem de $\mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ em $\mathbb{C}^3 \times S^1$. Porém, determinar esta imagem leva a uma série de problemas interessantes, alguns em aberto, de álgebra linear clássica:

Problema. Quando um conjunto de números complexos z_1, \dots, z_n forma a diagonal de uma matriz unitária?

Este problema tem uma belíssima solução devida a Horn [12] que apresentamos na seção 3.4. Porém, o problema que aplica diretamente é

Problema. Quando um conjunto de números complexos z_1, \dots, z_n, D , $|D| = 1$, forma a diagonal e o determinante de uma matriz unitária?

Este problema aparentemente está em aberto, mesmo em dimensão três. É explícito no artigo [14] que é um problema bem mais difícil que o problema sem considerar o determinante. Visando resolver o problema de minimização, chegamos ao seguinte resultado, que pode ser interpretado como uma solução *local* do problema:

Teorema 2. Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ tal que os elementos fora da diagonal satisfazem $|u_{2,1}||u_{1,3}||u_{3,2}| \neq |u_{1,2}||u_{2,3}||u_{3,1}|$. Então a derivada em u da projeção $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3 \times S^1$ dada pelos elementos diagonais e o determinante tem posto máximo.

A condição fornecida pelo Teorema 2 realmente não ajudou para calcular o diâmetro; a ideia principal que possibilitou o cálculo do diâmetro de \mathcal{F}_3 foi uma interpretação geométrica dos extremos no caso de dimensão três, que por sua vez levou ao que chamamos de *princípio de máxima simetria*, e abriu as portas para os seguintes resultados:

Teorema 3. O diâmetro de cada bandeira completa \mathcal{F}_n é $\frac{n-1}{n}\pi$.

Teorema 4. Seja \mathcal{B} uma subálgebra- C^* abeliana de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Então o diâmetro da bandeira generalizada correspondente ao par $(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{B})$ é $\frac{n-1}{n}\pi$.

O princípio de máxima simetria também fornece métodos para calcular o diâmetro de bandeiras mais gerais, descritas na seção 3.3

A comparação entre o Teorema 3 e o Teorema 4 é muito relevante para o nosso objetivo, já que entre estes dois teoremas fica em evidência que o diâmetro como invariante geométrico *não* distingue um dos principais invariantes algébricos- C^* , a *multiplicidade*. Descrevemos de maneira precisa o conceito de multiplicidade na subseção 1.1.2, mas por enquanto podemos descrever informalmente a multiplicidade como o número de vezes que uma álgebra de matrizes $M_k(\mathbb{C})$ aparece “repetida” numa representação de uma álgebra maior. Como exemplo extremo, fixando $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, o diâmetro correspondente aos pares produzidos por $\mathcal{B} = \{\text{todas as matrizes diagonais}\}$ e $\mathcal{B} = \{\text{apenas os múltiplos da identidade}\}$ é o mesmo, $\frac{n-1}{n}\pi$. Notemos que o primeiro destes casos corresponde às bandeiras completas em \mathbb{C}^n , e o segundo ao grupo unitário projetivizado $\mathbb{P}U(n)$.

Assim, para distinguir multiplicidade precisamos de um invariante mais fino: dado um ponto x num espaço métrico X , o *conjunto antipodal* de x é o conjunto de todos os pontos que realizam o supremo da função $y \mapsto d(x, y)$; assim, o conjunto antipodal é um invariante de “segunda ordem”: o conjunto antipodal fornece o diâmetro de X e os pontos onde este é realizado. Num espaço homogêneo, sem perda de generalidade podemos fixar x e então o conjunto antipodal pode ser descrito como o conjunto de todos os pontos y tais que $d(x, y)$ realiza o diâmetro de X . Salientamos que o cálculo do conjunto antipodal em espaços homogêneos gerais é um problema bastante complexo, vide [3]. No Teorema 1 vemos que o conjunto antipodal de \mathcal{F}_3 consiste exatamente em dois pontos, enquanto veremos que para as outras bandeiras generalizadas de $M_3(\mathbb{C})$ o conjunto antipodal é uma variedade de dimensão não nula. Assim, a união das informações “diâmetro” e “dimensão do conjunto antipodal” distingue a multiplicidade da bandeira. Em dimensão geral, conjecturamos que isto ainda é verdade, porém, o problema algébrico associado é de grande complexidade.

A Tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 1 damos uma breve introdução às álgebras- C^* , as suas subálgebras e as bandeiras generalizadas correspondentes. Esta descrição não é exaustiva, mas só o necessário para desenvolver os métodos e intuições necessárias para estudar o nosso problema concreto finito-dimensional. Resultados mais gerais são desenvolvidos nos apêndices. Os resultados conhecidos de bandeiras generalizadas como espaço de comprimento estão contidos na seção 2.1.

Os teoremas principais da Tese e a teoria necessária para desenvolvê-los estão contidos no capítulo 3. Finalmente, o capítulo 4 é dedicado à descrição da função objetivo sob o ponto de vista numérico, salientando os problemas de falta de diferenciabilidade e convexidade desta família de funções; também apresentamos um *algoritmo* que foi uma tentativa de encontrar a forma das soluções. Salientamos que estamos cientes que este algoritmo é bastante inocente - é por um método de força bruta - e, de fato, não chegou a dar a forma das soluções, o que no começo nos afastou da resolução do problema. Apresentamos este capítulo como um convite para os especialistas, de simular numericamente o problema do diâmetro.

Capítulo 1

Noções de álgebras- C^* e bandeiras generalizadas

O objetivo principal deste capítulo é estabelecer a linguagem, exemplos básicos, teoremas fundamentais e as intuições do trabalho, ver [7, 10].

1.1 Álgebras- C^*

1.1.1 Definições e teoremas fundamentais

Uma *álgebra- C^** consiste em três estruturas mutuamente compatíveis:

- (1) Uma álgebra \mathcal{A} sobre os números complexos, que, nos espaços que estudaremos neste trabalho, tem uma identidade.
- (2) Uma involução $\begin{cases} \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ a & \mapsto & a^* \end{cases}$
- (3) Uma norma $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

Descrevemos a seguir as condições de compatibilidade: se $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$,

(1) e (2): A involução é uma transformação antilinear quando consideramos \mathcal{A} como espaço vetorial sobre \mathbb{C} , isto é,

$$(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, \quad (a + b)^* = a^* + b^*,$$

e é um antihomomorfismo para o produto:

$$(ab)^* = b^* a^*$$

(1) e (3): A norma satisfaz as condições de uma norma em relação à estrutura de espaço vetorial,

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|, \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

e, em relação ao produto,

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Além das relações algébricas, \mathcal{A} é um espaço métrico completo em relação à norma. As compatibilidades descritas até agora, sem a estrutura da involução, é conhecida como *álgebra de Banach*.

(2) e (3) A involução é uma isometria: $\|a\| = \|a^*\|$ (só isto faz de \mathcal{A} uma *álgebra involutiva de Banach*), e, finalmente,

$$\|a^*a\| = \|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Destacamos a última propriedade porque é especialmente importante: com este requerimento, *não temos escolha na norma*, ela é unicamente determinada pelas outras estruturas e a compatibilidade.

A seguir descrevemos os exemplos paradigmáticos de álgebras- C^* . As caracterizações mencionadas em cada exemplo são mostradas no Apêndice A do trabalho.

- A álgebra $M_n(\mathbb{C})$ com a sua estrutura de álgebra usual, a involução é dada por $a^* = \bar{a}^\top$, e a norma é a norma de operador:

$$\|a\|^2 = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|a\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \max \{ \lambda; \lambda \text{ é autovalor de } a^*a \}.$$

Toda álgebra- C^* de dimensão finita é uma *álgebra de multimatrizes* (ver Teorema A.34), isto é, produto de álgebras $M_{n_i}(\mathbb{C})$ com o produto e involução componente a componente e a norma do supremo do conjunto das normas das componentes.

- A álgebra $B(\mathcal{H})$ de operadores lineares limitados em um espaço de Hilbert complexo; a involução é a adjunta clássica definida por $\langle a\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, a^*\vec{w} \rangle$, a norma é de novo a norma de operadores. Observemos que o item anterior é o caso da dimensão de \mathcal{H} ser finita e fixar uma base. O teorema de representação de Gelfand, Naimark e Segal (conhecido como construção GNS) diz que toda álgebra- C^* pode ser fielmente representada como uma subálgebra de $B(\mathcal{H})$ (ver Teorema A.75).
- Álgebras- C^* abelianas: se X é um espaço compacto e Hausdorff, a álgebra $\mathcal{C}(X)$ de funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, munida da involução $f^*(x) = \overline{f(x)}$ e a norma do supremo, é uma álgebra- C^* . Reciprocamente, dada uma álgebra- C^* abeliana \mathcal{A} , o conjunto de seus ideais maximais $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ admite uma topologia que faz dele um espaço compacto e Hausdorff, e \mathcal{A} é isometricamente isomorfa (como álgebra- C^*) a $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$; isto é conhecido como transformada de Gelfand (ver Teorema A.59). É bom salientar que a álgebra- C^* $\mathcal{C}(X)$ é mais interessante e tem mais estrutura quanto mais “feio” (para a estética da Geometria Diferencial) é o espaço X ; por exemplo, um dos subconjuntos mais importantes de uma álgebra é o espaço dos seus projetores, e se X é conexo então $\mathcal{C}(X)$ não admite projetores não triviais.

1.1.2 Álgebras- C^* e suas subálgebras em dimensão finita

Seja A uma subálgebra involutiva de $B(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert de dimensão finita \mathcal{H} . Assumamos que A contém o operador identidade de \mathcal{H} , denotado por $id_{\mathcal{H}}$ ou simplesmente $\mathbb{1}$. Queremos mostrar que existe um isomorfismo da forma

$$A \approx \bigoplus_{j=1}^r M_{n_j}(\mathbb{C})$$

ou, em outras palavras, que A é uma álgebra de multimatrizes. Também queremos construir uma inclusão de $\bigoplus_{j=1}^r M_{n_j}(\mathbb{C})$ em $B(\mathcal{H})$. Isto se resume no Teorema 1.3 para o qual precisamos das duas definições seguintes e cuja demonstração está no Apêndice A.

Definição 1.1. *Seja S um subconjunto de $B(\mathcal{H})$. O **comutante** de S , denotado por S' , é o conjunto de todos os elementos de $B(\mathcal{H})$ que comutam com S , isto é,*

$$S' = \{a \in B(\mathcal{H}) ; as = sa \text{ para todo } s \in S\}.$$

Escrevemos S'' em lugar de $(S')'$, e S''' em lugar de $(S'')'$, etc.

Definição 1.2. *Uma álgebra de Von Neumann em $B(\mathcal{H})$ é uma subálgebra involutiva A de $B(\mathcal{H})$ tal que $A'' = A$. Um fator em \mathcal{H} é uma álgebra de Von Neumann A tal que o centro $Z(A) = A' \cap A$ se reduz a $\mathbb{C}id_{\mathcal{H}}$.*

Teorema 1.3. *Seja $\mathcal{H} \approx \mathbb{C}^n$ um espaço de dimensão finita e seja A uma subálgebra involutiva de $B(\mathcal{H}) \approx M_n(\mathbb{C})$ que contém a identidade. Sejam p_1, \dots, p_r as projeções minimais no centro $Z(A)$ de A . Então existem inteiros estritamente positivos n_1, \dots, n_r tais que $p_j A p_j \approx M_{n_j}(\mathbb{C})$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, e*

$$A \approx \bigoplus_{j=1}^r M_{n_j}(\mathbb{C}).$$

Além disso, se μ_j denota a multiplicidade da representação de $p_j A p_j$ em $B(p_j \mathcal{H})$, então $\sum_{j=1}^r \mu_j n_j = n$.

Demonstração. Ver seção A.3 do Apêndice A. □

Definição 1.4. *Seja A um fator em $\mathcal{H} \approx \mathbb{C}^n$. Então existe um divisor m de n tal que $A \approx M_m(\mathbb{C})$. O inteiro n/m é chamado **multiplicidade da representação** de $M_m(\mathbb{C})$ em $M_n(\mathbb{C})$.*

Exemplo 1.5.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_6(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

é uma representação de multiplicidade 3.

A seguir mostramos um exemplo de uma representação de um produto matricial.

Exemplo 1.6. *Considere $\mathcal{A} = M_6(\mathbb{C}) \times M_5(\mathbb{C})$ e $\mathcal{B} = M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \times M_1(\mathbb{C}) \times M_1(\mathbb{C})$ com \mathcal{B} subálgebra- C^* de \mathcal{A} , também podemos ter multiplicidades espalhadas pelas componentes da forma seguinte:*

$$\left(\left(\begin{array}{c|c|c} A & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & A & 0_{2 \times 2} \\ \hline 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & B \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 2} & C & \theta & \theta \\ \hline 0_{1 \times 2} & \theta & C & \theta \\ \hline 0_{1 \times 2} & \theta & \theta & D \end{array} \right) \right),$$

com $A \in M_2(\mathbb{C})$, $B \in M_2(\mathbb{C})$, $C \in \mathbb{C}$ e $D \in \mathbb{C}$.

No exemplo anterior vimos que pode haver repetições na matriz e nas componentes.

1.2 Bandeiras generalizadas

1.2.1 Bandeiras generalizadas como conjunto

As estruturas presentes em uma álgebra- C^* nos permitem falar de conceitos geométricos: primeiramente, já que temos uma involução que abstrai a conjugada transposta das matrizes, podemos falar do *grupo unitário* da álgebra:

Definição 1.7. O grupo unitário $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ de uma álgebra- C^* \mathcal{A} é o conjunto

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{A} ; u^*u = uu^* = \mathbb{1}\}.$$

Salientamos que, em dimensão infinita, ambas as condições $u^*u = uu^* = \mathbb{1}$ são necessárias, devido às “isometrias parciais”.

A presença do grupo unitário (e o cálculo funcional em dimensão infinita) já permite usar métodos da geometria diferencial homogênea: a álgebra de Lie do grupo unitário consiste dos elementos antissimétricos da álgebra

$$\mathcal{A}^{ant} = \{X \in \mathcal{A} ; X + X^* = 0\}$$

e os *subgrupos a um parâmetro* $\gamma(t) = e^{tX}$ são curvas naturais em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ com origem na identidade.

Os conjuntos a serem estudados nesta abordagem são as “bandeiras generalizadas”, que por definição são os espaços quociente $\mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$ em que \mathcal{B} é uma subálgebra de \mathcal{A} . Daremos a seguir exemplos de bandeiras generalizadas identificando-as *como conjunto*, com o intuito de familiarizar o leitor com o conceito, e relacionamos com exemplos clássicos de dimensão finita.

Consideremos primeiro as bandeiras “clássicas” de decomposições $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ em espaços mutuamente ortogonais de dimensões fixadas d_1, \dots, d_k tais que $\sum_{i=1}^k d_i = n$ e $\dim V_i = d_i$. Seja $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ uma decomposição ortogonal fixa. O grupo $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ age transitivamente nas bandeiras correspondentes às dimensões de W_1, \dots, W_k . Se definimos a subálgebra \mathcal{B} como

$$\mathcal{B} = \{a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) ; aW_i \subset W_i \quad \forall i = 1, \dots, k\},$$

vemos que o estabilizador $\{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) ; uW_i \subset W_i \quad \forall i = 1, \dots, k\}$ da decomposição $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ é exatamente o grupo unitário $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ que matricialmente seria.

$$\mathcal{U}(\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathcal{U}(\mathbb{M}_{d_1}(\mathbb{C})) & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \mathcal{U}(\mathbb{M}_{d_k}(\mathbb{C})) \end{array} \right)$$

Assim, se $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vemos como as bandeiras clássicas são um caso particular de bandeiras generalizadas.

O caso mais simples é a grassmanniana $Gr_k(\mathbb{C}^n)$, que é uma bandeira de apenas dois subespaços $\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$ em que $\dim(V) = k$. Usamos este caso para descrever

um exemplo de espaço homogêneo que *não* corresponde a uma bandeira generalizada: consideremos a variedade de Stiefel $V_k(\mathbb{C}^n)$ cujo elemento típico é uma k -upla $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ de k vetores ortonormais em \mathbb{C}^n . O grupo unitário $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ age transitivamente na variedade de Stiefel; o estabilizador de um ponto base, digamos os primeiros k elementos da base padrão de \mathbb{C}^n , é formado por matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ \hline & & & & 0 & \\ 0 & & & & & \mathcal{U}(\mathbb{M}_{n-k}(\mathbb{C})) \end{array} \right)$$

que não correspondem ao unitário de nenhuma subálgebra por causa da matriz identidade na parte superior esquerda; o unitário de uma subálgebra, se contém um elemento, tem que conter no mínimo todos os múltiplos deste elemento. Assim, no mínimo deveríamos ter

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & \\ \hline & & & & 0 & \\ 0 & & & & & \mathcal{U}(\mathbb{M}_{n-k}(\mathbb{C})) \end{array} \right),$$

com $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbb{C})$. Mesmo no caso real, precisaríamos pelo menos adicionar $-\mathbb{1}_{k \times k}$ no canto superior esquerdo.

Assim, a intuição é que uma bandeira generalizada corresponde a um espaço homogêneo compacto *totalmente projetivizado*.

Finalmente, passamos a ilustrar com alguns exemplos concretos o que pode acontecer com bandeiras generalizadas além das bandeiras clássicas. Podem acontecer dois fenômenos: o principal é a *multiplicidade*. Consideremos por exemplo $\mathcal{A} = \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ e a subálgebra \mathcal{B} dada por matrizes de forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

isto é, as primeiras duas entradas da diagonal são repetidas. Esta bandeira generalizada fibra sobre uma bandeira clássica de decomposições de \mathbb{C}^3 em três subespaços mutuamente ortogonais; este fenômeno é universal e fornece uma maneira de estudar a geometria de bandeiras generalizadas através de bandeiras clássicas.

Outro fenômeno é considerar *produtos*; por exemplo, seja $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. A primeira vista isto parece não oferecer dificuldades, produzindo produtos de bandeiras. Porém, a subálgebra \mathcal{B} pode ter multiplicidades espalhadas pelas componentes, conforme, no exemplo dado,

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{A}.$$

De novo, temos uma fibração sobre uma variedade mais simples, neste caso um produto de bandeiras clássicas. No pior dos casos, podemos ter multiplicidades no produto como no Exemplo 1.6.

1.2.2 Bandeiras generalizadas como espaços de comprimento

Nesta subseção vamos estudar as bandeiras generalizadas como espaços de comprimento e que denotaremos por \mathcal{P} , em que a métrica invariante é induzida pela norma quociente de \mathcal{A}/\mathcal{B} .

Assim como no artigos [9, 10], nesta subseção e na seção 2.1 vamos considerar as bandeiras generalizadas como sendo variedades de Banach \mathcal{P} nas quais o grupo unitário \mathcal{U} da álgebra- C^* \mathcal{A} age transitivamente, digamos pela esquerda; denotemos a ação de $g \in \mathcal{U}$ em $\rho \in \mathcal{P}$ por L_g . O estabilizador $E_\rho = \{g \in \mathcal{U}; L_g \rho = \rho\}$ será o grupo unitário da subálgebra- C^* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, este conceito será formalizado na Definição 1.8. Na Tese usamos livremente a identificação natural $\mathcal{P} = \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$.

A forma usual de dotar um espaço de uma métrica é considerar uma métrica bi-invariante no grupo e então descer para o quociente \mathcal{P} . Mas álgebras- C^* vêm dotadas com uma norma única, ou seja, a norma de operadores em alguma representação de \mathcal{A} no espaço de Hilbert \mathcal{H} , a qual é bi-invariante embora certamente não riemanniana, pois não provém de um produto interno. Esta norma é completamente não regular, em dois sentidos: primeiro, não é diferenciável mas apenas contínua. Segundo, não é estritamente convexa; existem muitos conjuntos abertos de subespaços afins contidos na esfera unitária, o qual dificulta muitas construções do cálculo das variações, tendo que mudar por métodos geométricos diretos para calcular as “geodésicas”, curvas que minimizam a distância entre dois pontos. Isto será discutido com mais detalhe no capítulo 4.

Resta a questão de como fazer descer a métrica em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ para o quociente \mathcal{P} , sendo que temos a fibração $\mathcal{U}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$, o tangente $T_{[u]}\mathcal{P}$ é canonicamente identificado com o quociente do tangente do grupo unitário $T_u\mathcal{U}(\mathcal{A})$ pelo tangente à fibra, que é isomorfo ao tangente na identidade de $\mathcal{U}(\mathcal{B})$. Além disso, por translação à esquerda, $T_u\mathcal{U}(\mathcal{A})$ é naturalmente isomorfo a $T_1\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Assim,

$$T_\rho\mathcal{P} \simeq (T_1\mathcal{U}) / (T_1E_\rho) = \mathcal{A}^{ant} / \mathcal{B}^{ant}$$

em que \mathcal{A}^{ant} e \mathcal{B}^{ant} denotam as partes antissimétricas das álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente, e a métrica natural seria considerar cada espaço tangente $T_\rho\mathcal{P}$ como o quociente de Banach acima. Portanto, definimos a norma de Finsler em \mathcal{P} por $\|X\| = \inf_{b \in \mathcal{B}^{ant}} \|Z + b\|$ com Z projetando X no quociente e $\|\cdot\|$ denotando a norma na álgebra- C^* \mathcal{A} . A partir disto temos as seguintes definições.

Definição 1.8. Dizemos \mathcal{P} é uma **bandeira generalizada** se satisfaz as seguintes condições:

- (1) \mathcal{P} é uma variedade de Banach C^∞ .
- (2) Existe uma álgebra- C^* \mathcal{A} com identidade cujo grupo unitário \mathcal{U} age transitivamente e suavemente em \mathcal{P} pela esquerda.

- (3) O grupo estabilizador E_ρ em $\rho \in \mathcal{P}$ dado por $E_\rho = \{g \in \mathcal{U}; L_g \rho = \rho\}$, é o grupo unitário \mathcal{U}_ρ da subálgebra- C^* \mathcal{B}_ρ de \mathcal{A} .
- (4) A derivada $T_1 \pi_\rho : T_1 \mathcal{U} = \mathcal{A}^{ant} \rightarrow T_\rho \mathcal{P}$ da função natural $\pi_\rho : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$ dada por $\pi_\rho(g) = L_g(\rho)$ é sobrejetiva.
- (5) A estrutura de Finsler em \mathcal{P} é dada por $\|X\|_\rho = \inf_{b \in \mathcal{B}_\rho^{ant}} |Z + b|$, em que $T_1 \pi_\rho(Z) = X$, ou seja, para $\rho \in \mathcal{P}$, a norma $\|X\|_\rho$ é a norma quociente de Banach de X em $T_1 \mathcal{U} / T_1 E_\rho = \mathcal{A}^{ant} / \mathcal{B}_\rho^{ant}$.

Definição 1.9. O comprimento da curva $\rho(t)$ definida para $0 \leq t \leq 1$ está dado por

$$\ell(\rho) = \int_0^1 \|\dot{\rho}(t)\|_{\rho(t)} dt,$$

em que $\|X\|_{\rho(t)}$ denota a norma de Finsler do vetor tangente X no ponto $\rho(t) \in \mathcal{P}$.

A distância d em \mathcal{P} é dada como segue: seja R_{ρ_0, ρ_1} o conjunto de caminhos suaves por partes $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ que unem $\rho(0) = \rho_0$ com $\rho(1) = \rho_1$. Definimos,

$$d(\rho_0, \rho_1) = \inf_{\rho \in R_{\rho_0, \rho_1}} \ell(\rho).$$

Definição 1.10. Dizemos que uma curva ρ é **mínima** em \mathcal{P} se seu comprimento é a distância entre seus extremos. Chamaremos essas curvas mínimas de geodésicas.

Capítulo 2

Curvas de comprimento mínimo em bandeiras generalizadas

2.1 Geodésicas em bandeiras generalizadas

Nesta seção apresentamos, de forma muito breve, a estrutura métrica dada pelo comprimento de curvas e a estrutura das geodésicas [10]. Apresentamos um estudo mais detalhado no Apêndice B.

Definição 2.1. Uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{P}$ da forma $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$ para $Z \in \mathcal{A}^{ant}$ e $t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ é chamada **curva do grupo uni-paramétrico**.

Definição 2.2. Dizemos que $Z \in \mathcal{A}^{ant}$ é um **levantamento** de $X \in T_\rho\mathcal{P}$, se $T_{\mathbb{1}}\pi_\rho(Z) = X$.

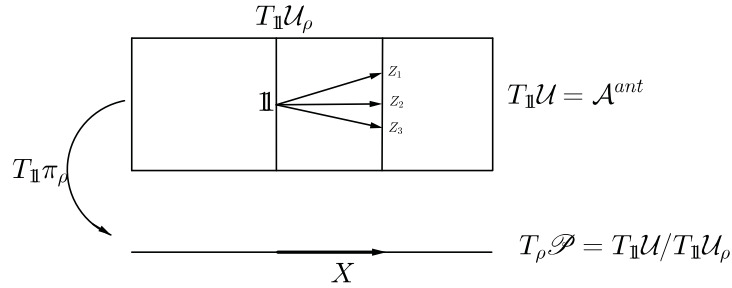


Figura 2.1: Z_1, Z_2 e Z_3 são levantamentos de X .

Note que a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $\alpha(t) = e^{tZ}$ satisfaz $\alpha(0) = \mathbb{1}$ e $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(t)) = Z$ então

$$X = (T_{\mathbb{1}}\pi_\rho)(Z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\pi_\rho \circ \alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\pi_\rho(\alpha(t))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{\alpha(t)}\rho = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{e^{tZ}}\rho.$$

Em consequência, outra forma de definir um levantamento é a seguinte.

Definição 2.3. Seja $X \in T_\rho\mathcal{P}$ um vetor tangente a uma bandeira generalizada. Dizemos que um vetor $Z \in T_{\mathbb{1}}\mathcal{U} = \mathcal{A}^{ant}$ é um **levantamento** de X se $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{e^{tZ}}\rho = X$, isto é, Z projeta X no quociente.

Definição 2.4. Dizemos que $Z \in \mathcal{A}^{ant}$ é um **levantamento mínimo** de $X \in T_\rho \mathcal{P}$, se $T_{\mathbb{1}}\pi_\rho(Z) = X$ e $|Z| = \|X\| = \inf \{|Z|, Z \text{ é um levantamento de } X\} = \inf_{b \in \mathcal{B}_\rho^{ant}} |Z + b|$.

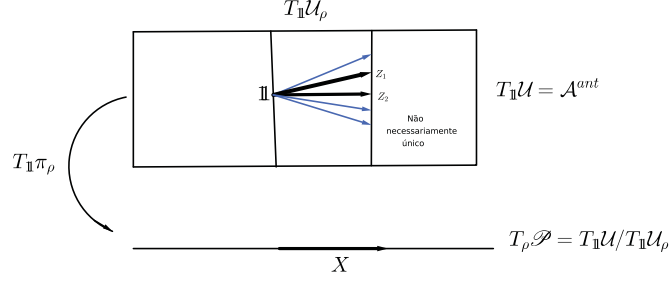


Figura 2.2: Z_1 e Z_2 são levantamentos mínimos de X

Observemos que se V e W são espaços euclidianos (o que nunca será o nosso caso!) e $F : V \rightarrow W$ linear e sobrejetora então $F|_{\text{Ker}(F^\perp)}$ é um isomorfismo e portanto o levantamento mínimo existe e é único. No caso geral temos um problema de existência e unicidade pois levantamento mínimo nem sempre existe e se existe não necessariamente é único como se ilustra na Figura 2.2. Discutiremos isto no Capítulo 4.

2.1.1 Existência de geodésicas

As ferramentas básicas para estudar a geometria métrica de \mathcal{P} são os dois resultados seguintes adaptados de [9, 10].

Teorema 2.5. ([9]) *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada de dimensão finita. Então dado $[a_0] \in T_{[\mathbb{1}]} \mathcal{P}$, existe $b \in \mathcal{B}^{ant}$ tal que $a = a_0 + b \in \mathcal{A}^{ant}$ é um vetor mínimo, e a curva $[e^{ta}]$, $t \in [0, \ell]$, minimiza a distância entre seus extremos se $\ell \leq \frac{\pi}{2|a|}$*

O teorema acima resolve o problema de encontrar geodésicas com velocidade inicial dada.

Teorema 2.6. ([10]) *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada de dimensão finita. Então, dado $p \in \mathcal{P}$, existe um vetor mínimo $Z \in \mathcal{A}^{ant}$, $|Z| = 1$, tal que a curva $[e^{tZ}]$, $t \in [0, \ell]$ une $[\mathbb{1}]$ a p e o comprimento desta curva realiza a distância entre $[\mathbb{1}]$ e p .*

O teorema anterior resolve o problema de encontrar geodésicas unindo extremos fixos.

Observação 2.7. *Enunciamos os teoremas com $[\mathbb{1}] \in \mathcal{P}$ como ponto base; pela homogeneidade, eles são naturalmente válidos para curvas que emanam de ou unem pontos arbitrários.*

Observação 2.8. *A falta de convexidade estrita faz com que nem o vetor mínimo do Teorema 2.5 nem a curva mínima uniparamétrica do Teorema 2.6 sejam necessariamente únicos. Este fenômeno é estudado em [1] para as variedades bandeira completa \mathcal{F}_3 e \mathcal{F}_4 e será apresentado na seção seguinte.*

Proposição 2.9. *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada sobre uma álgebra de Von Neumann \mathcal{A} . Então o diâmetro $\text{diam}(\mathcal{P})$ de \mathcal{P} satisfaz $\frac{\pi}{2} \leq \text{diam}(\mathcal{P}) \leq \pi$.*

Demonstração. Sejam X um vetor tangente a \mathcal{P} não nulo e qualquer ponto ρ . Seja Z um levantamento mínimo de X . Então o Teorema 2.5 mostra que a distância entre os pontos ρ e $\gamma\left(\frac{\pi}{2|Z|}\right)$ é $\frac{\pi}{2}$, em que $\gamma(t) = L_{etz}\rho$ (note que a construção da norma de Finsler em \mathcal{P} mostra que $\|\gamma'(t)\|$ é constante igual a $|Z|$). Portanto $\text{diam}(\mathcal{P}) \geq \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, para $\rho, \sigma \in \mathcal{P}$ seja $g \in \mathcal{U}$ tal que $L_g\rho = \sigma$. Como estamos supondo que \mathcal{A} é uma álgebra de Von Neumann existe um elemento simétrico $s \in \mathcal{A}$ tal que $e^{is} = g$ e $|s| \leq \pi$ (ver Lema 2.5 em [10]). Então a curva $L_{e^{itz}}\rho$ tem comprimento menor ou igual a π e une ρ a σ . \square

2.2 Resultados infinitesimais em dimensão três e quatro

Nesta seção descrevemos o artigo [1], que é um trabalho que pode ser considerado “ancestral” desta Tese. Neste artigo os autores estudam o problema *infinitesimal* de minimalidade, isto é, o mínimo $\min_{b \in \mathcal{B}^{ant}} |v + b|$, $v \in \mathcal{A}^{ant}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ para o caso correspondente às bandeiras completas em dimensões 3 e 4. Vemos que mesmo sendo o caso infinitesimal linear e a dimensão baixa, a complexidade da álgebra linear envolvida é grande.

2.2.1 Matrizes mínimas 3×3

O interesse nas matrizes mínimas 3×3 surgiu com o estudo da variedade bandeira \mathcal{F}_3 . Este é o espaço de três retas mutuamente ortogonais em \mathbb{C}^3 (subespaço complexo de dimensão um) o qual é de fato um exemplo em dimensão finita de um espaço homogêneo. O grupo de operadores unitários em \mathbb{C}^3 age pela esquerda em \mathcal{F}_3 . Considere a bandeira canônica $p_e = (\text{span}\{e_1\}, \text{span}\{e_2\}, \text{span}\{e_3\})$ com $\text{span}\{e_i\}$ sendo a reta complexa gerada pelo vetor canônico $e_i \in \mathbb{C}^3$. A isotropia de p_e é o subgrupo de operadores unitários “diagonais”.

De novo, o interesse aqui em matrizes mínimas 3×3 é devido ao Teorema 2.5. A saber, curvas mínimas em \mathcal{F}_3 são dadas pela ação das (classes de) exponenciais de matrizes mínimas 3×3 anti-hermitianas. Estudar matrizes mínimas 3×3 anti-hermitianas é (isometricamente) equivalente a investigar as matrizes mínimas 3×3 hermitianas.

Um estudo das matrizes mínimas 3×3 hermitianas

Definição 2.10. Dizemos que uma matriz não nula $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ é **mínima** se, $\|M\| = \inf_{D \in \text{Diag}_3} \|M + D\|$, em que Diag_3 denota o conjunto de matrizes diagonais unitárias 3×3 , e tal conjunto de matrizes mínimas será denotado por \mathcal{M} .

Alguma notação

Denotaremos por \mathcal{D}_3 o subconjunto de matrizes diagonais reais. Denotamos por \mathcal{M} o espaço quociente $\mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})/\mathcal{D}_3$ com norma quociente

$$|[M]| = \inf_{D \in \mathcal{D}_3} \|M + D\|$$

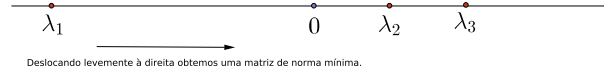
em que $\|\cdot\|$ é o operador norma usual.

Proposição 2.11. Se $M \in \mathcal{M}$ e $\|M\| = \lambda (> 0)$, e $\text{tr}(M) = \mu$ então,

- (1) A matriz $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ é mínima se, e somente se, $\|M\| = |[M]|$.
- (2) Os números $-\lambda, \lambda$ e μ são autovalores de M e o diâmetro “ d ” do espectro de M é $d = 2\lambda$.

Demonstração. (1) Decorre diretamente da definição de matriz mínima.

A condição (2) é equivalente a dizer que o autovalor λ de máximo valor absoluto aparece como um par de autovalores $\lambda, -\lambda$. Caso contrário, se $d < 2\lambda$ podemos adicionar uma matriz escalar real D a M para dar origem a uma outra matriz $M + D$ com norma $\frac{d}{2} < \lambda$, e M não será mínima. \square



Resultados auxiliares em \mathbb{C}^3

Para descrever as matrizes mínimas precisamos de alguns conceitos que apresentamos a continuação.

Definição 2.12. Dizemos que um vetor $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ é **triangular** se este é unitário e os números $|a_1|^2, |a_2|^2, |a_3|^2$ são os comprimentos dos três lados de um triângulo, ou seja, cada um deles é menor ou igual à soma dos outros dois números.

Observação 2.13. Se um vetor $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ é triangular e uma de suas componentes é zero, então as outras duas têm comprimento igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Proposição 2.14. ([1]) Qualquer vetor $v = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ é triangular se, e somente se, existe um vetor unitário $w = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{C}^3$, ortogonal a v tal que, $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$, $|a_3| = |b_3|$. Além disso, existem no máximo dois de tais vetores, w e \tilde{w} , para qualquer vetor triangular v dado.

Definição 2.15. Dizemos que um par ordenado (v, w) de vetores triangulares, $v = (a_1, a_2, a_3)$ e $w = (b_1, b_2, b_3)$ em \mathbb{C}^3 forma um **par triangular** se eles são ortogonais e as igualdades $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$, $|a_3| = |b_3|$ são válidas.

Corolário 2.16. Todo vetor triangular $v = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ é a primeira coordenada de ao menos um e no máximo dois pares triangulares, (v, w) e (v, \tilde{w}) .

Demonstração. Imediato a partir da Proposição 2.14. \square

Teorema prévio- Uma caracterização de matrizes 3×3 minimais

Teorema 2.17. ([1]) Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ com $\|M\| = \lambda > 0$. Então $M \in \mathcal{M}$ se, e somente se, existe um par triangular (v_+, v_-) de autovetores de M , v_+ para o autovalor λ , e v_- para o autovalor $-\lambda$.

2.2.2 Descrição do conjunto de matrizes mínimas

Vamos introduzir duas definições convenientes para nosso próximo teorema.

Definição 2.18. *Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$. Dizemos que M é do tipo **extremal** se existem:*

- (1) $\eta \in [0, 2\pi)$,
- (2) $\lambda > 0$,
- (3) $\mu \in \mathbb{R}$ com $|\mu| \leq \lambda$,

tais que M é uma das três matrizes seguintes:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e^{i\eta} \\ 0 & \lambda e^{-i\eta} & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda e^{-i\eta} \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda e^{i\eta} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{-i\eta} & 0 \\ \lambda e^{i\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Definição 2.19. *Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$. Dizemos que M é do tipo **não extremal** se existem:*

- (1) Dois números reais η e ξ em $[0, 2\pi)$,
- (2) $\lambda > 0$,
- (3) $\mu \in \mathbb{R}$ com $|\mu| \leq \lambda$,
- (4) Três números não negativos α, β e χ , com: $2\alpha + 2\beta + 2\chi = 1$, $\alpha + \beta > 0$, $\beta + \chi > 0$ e $\alpha + \chi > 0$,

tais que

$$M = \mu \begin{pmatrix} 2\alpha & n_{12} & \overline{n_{31}} \\ \overline{n_{12}} & 2\beta & n_{23} \\ n_{31} & \overline{n_{23}} & 2\chi \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \overline{m_{31}} \\ \overline{m_{12}} & 0 & m_{23} \\ m_{31} & \overline{m_{23}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

em que

$$\begin{cases} n_{12} = \frac{-2\alpha\beta \pm i\sqrt{2\alpha\beta\chi}}{\sqrt{(\alpha+\chi)(\beta+\chi)}} e^{-i\eta} \\ n_{31} = \frac{-2\alpha\chi \pm i\sqrt{2\alpha\beta\chi}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\chi)}} e^{-i\xi} \\ n_{23} = \frac{-2\beta\chi \pm i\sqrt{2\alpha\beta\chi}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\chi)}} e^{-i(\xi-\eta)} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} m_{12} = \frac{\chi \pm i\sqrt{2\alpha\beta\chi}}{\sqrt{(\alpha+\chi)(\beta+\chi)}} e^{-i\eta} \\ m_{31} = \frac{\beta \pm i\sqrt{2\alpha\beta\chi}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\chi)}} e^{-i\xi} \\ m_{23} = \frac{\alpha \pm i\sqrt{2\alpha\beta\chi}}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\chi)}} e^{-i(\xi-\eta)} \end{cases} \quad (2.3)$$

para um dos dois conjuntos de escolhas correspondentes de sinais.

Observação 2.20. *Para matrizes de ambos tipos, extremal e não extremal, os parâmetros $\lambda > 0$ e μ , respectivamente, dão a norma de M , $\|M\| = \lambda$, e o traço de M , $\text{tr}(M) = \mu$.*

Em virtude do Teorema 2.17 uma matriz M é mínima se, e somente se, existe um par triangular (v_+, v_-) de autovetores de M , v_+ para o autovalor λ , e v_- para o autovalor $-\lambda$.

Teorema 2.21. *Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$, se M é mínima então um dos seguintes dois casos mutuamente exclusivo ocorre:*

- (1) O autovetor triangular v_+ no par triangular associado a M tem uma das componentes nula e M é do tipo extremal.
- (2) O autovetor triangular v_+ no par triangular associado a M não tem nenhuma componente nula e M é do tipo não extremal.

Teorema 2.22 (Construção). *Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$. Se M é uma matriz do tipo da Definição 2.18 ou da Definição 2.19, então M é mínima.*

Demonstração. Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ uma matriz do tipo extremal ou não extremal, então pela Observação 2.20 os parâmetros $\lambda > 0$ e μ correspondem à norma $\|M\| = \lambda$ e o traço $\text{tr}(M) = \mu$ de M . Um cálculo direto mostra que as matrizes desses dois tipos têm λ e $-\lambda$ como autovalores e a eles correspondem autovetores v_+ e v_- os quais formam um par triangular. Então, pelo Teorema 2.17, essas matrizes são mínimas. \square

Teorema 2.23 (extremais e não extremais). *Seja $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$, então M é mínima se, e somente se, M é de um dos dois tipos: extremal ou não extremal.*

Demonstração. Imediato dos teoremas 2.21 e 2.22. \square

2.2.3 Matrizes mínimas 3×3 para a classe $[M]$

A composição algébrica do problema

Qualquer matriz $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ pode ser escrita como

$$M = \begin{pmatrix} a & x & \bar{y} \\ \bar{x} & b & z \\ y & \bar{z} & c \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in \mathbb{C}$. Observemos que o espaço quociente \mathcal{M} é homeomorfo a $\mathbb{C}^3 - \{0\}$, pois a classe de M , $[M] \in \mathcal{M}$ está dada pela tripla (x, y, z) de números complexos. Da Proposição 2.11 temos que os três autovalores reais de toda matriz mínima $M \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ são: algum $\lambda \in (0, +\infty)$, o oposto $-\lambda$ e um número intermediário μ ($|\mu| \leq \lambda$). Este fato impõe algumas condições necessárias para os coeficientes u, v e w do polinômio característico, $\det(M - \Lambda I) = -\Lambda^3 + u\Lambda^2 + v\Lambda + w$ de toda matriz mínima M :

Afirmção 2.24. *Sejam u, v, w os coeficientes do polinômio característico de uma matriz hermitiana M , $\det(M - \Lambda I) = -\Lambda^3 + u\Lambda^2 + v\Lambda + w$ então M tem dois autovalores de sinais opostos se, e somente se, os coeficientes u, v e w satisfazem*

$$uv + w = 0 \quad (2.5)$$

Encontrando as matrizes mínimas de uma classe $[M]$ em \mathcal{M}

Para uma classe fixada $[M_0] \in \mathcal{M}$ de uma matriz $M_0 \in \mathbb{M}_3^h(\mathbb{C})$ consideremos a variedade real dada pela equação

$$\mathcal{N} := uv + w = 0.$$

Qualquer matriz mínima M na classe $[M_0]$, deve estar em \mathcal{N} e deve ser mínimo para a função $\lambda^2 (= v)$ sobre a variedade real \mathcal{N} . Fazendo alguns cálculos e introduzindo a seguinte a mudança linear de variáveis:

$$a = \frac{r + s - t}{2}, \quad b = \frac{t + r - s}{2}, \quad c = \frac{s + t - r}{2},$$

obtemos que $r = a + b$, $s = a + c$ e $t = b + c$.

Assim, para encontrar matriz (ou matrizes) mínima na classe $[M_0]$ justamente temos que minimizar

$$\begin{aligned} \lambda^2(r, s, t) &= \frac{1}{4}(r^2 + s^2 + t^2) - \frac{1}{2}(rs + rt + st) + |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \\ \text{em } \mathcal{N} &:= rst - r|x|^2 - s|y|^2 - t|z|^2 + 2\operatorname{Re}(xyz) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Consideraremos quatro casos dependendo da tripla (x, y, z) . O Teorema 2.25 abaixo afirma que apenas no quarto caso podem existir múltiplas matrizes mínimas na classe $[M_0]$ dada.

1. $\operatorname{Im}(xyz) \neq 0$

Neste caso, a superfície \mathcal{N} é regular (uma variedade suave) e o método de multiplicadores de Lagrange pode ser usado para encontrar o único mínimo na classe.

2. $\operatorname{Im}(xyz) = 0$ e $\operatorname{Re}(xyz) \neq 0$

Neste caso, a superfície \mathcal{N} não é regular, possui um ponto singular o qual é o único mínimo na classe.

3. $\operatorname{Im}(xyz) = 0 = \operatorname{Re}(xyz)$ e exatamente uma das coordenadas de (x, y, z) se anula.

Neste caso, a superfície \mathcal{N} é regular; a classe possui um único mínimo na origem, $(r, s, t) = (0, 0, 0) = (a, b, c)$.

4. $\operatorname{Im}(xyz) = 0 = \operatorname{Re}(xyz)$ e exatamente duas das coordenadas de (x, y, z) se anulam.

Neste caso, a superfície \mathcal{N} não é regular ao longo de duas curvas e a classe possui múltiplos mínimos.

Teorema 2.25 (unicidade). *Para toda classe $[M] \in \mathcal{M}$, existe apenas uma matriz mínima, a menos que duas de suas coordenadas se anulem na tripla (x, y, z) .*

Teorema 2.26. *Para uma classe que possui apenas uma de suas coordenadas (x, y, z) igual a zero, a matriz mínima nesta classe é aquela com diagonal zero.*

Comentários sobre curvas mínimas em \mathcal{F}_3

- A variedade bandeira \mathcal{F}_3 possui curvas mínimas dadas pela ação de exponenciais de matrizes mínimas. A questão que surge, neste contexto, se a multiplicidade da matriz mínima em uma classe poderia conduzir a múltiplas curvas mínimas começando com a mesma velocidade inicial (dada pela classe em \mathcal{M}).
- Multiplicando uma matriz extremal pela unidade imaginária i , obtemos a versão anti-hermitiana de uma matriz extremal. As exponenciais das múltiplas matrizes mínimas em uma classe fixada (possivelmente apenas nas do tipo extremal) produz matrizes que diferem por um fator na isotropia da ação, assim as curvas mínimas

correspondentes descritas no Teorema 2.5 são as mesmas. Portanto, em \mathcal{F}_3 as curvas mínimas são únicas para um vetor velocidade inicial X (a classe de uma matriz minimal) dado.

- Em conclusão, para pontos próximos em \mathcal{F}_3 , existem únicas curvas mínimas unindo eles.
- Em \mathcal{F}_4 , existem múltiplas curvas mínimas unindo pontos arbitrariamente próximos.

Capítulo 3

Diâmetro de bandeiras generalizadas

Quase nada é conhecido sobre os invariantes métricos de bandeiras generalizadas, em particular o invariante métrico por excelência dado pelo diâmetro: se \mathcal{A} é uma álgebra de Von Neumann, então o diâmetro está contido no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ como vimos na Proposição 2.9. O limite inferior é uma consequência do Teorema 1 em [9] e é realizado pelas variedades de Grassmann (isto está implícito em [15]). O limite superior segue do fato de que o grupo unitário de uma álgebra de Von Neumann tem diâmetro π (ver lemas 2.2 - 2.5 de [10]) e a projeção $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$ não aumenta as distâncias. Os únicos outros exemplos de diâmetros calculados conhecidos pelos autores são as bandeiras generalizadas abelianas em que $\mathcal{A} = \mathbb{C}^n, \mathcal{B} = \mathbb{C}^m$ dado na seção 7.4 de [9].

Neste capítulo vamos denotar por \mathcal{F}_n a variedade bandeira generalizada de n subespaços mutuamente ortogonais em \mathbb{C}^n .

3.1 Redução do problema do diâmetro a um problema de max-min

3.1.1 Projeções que reduzem normas

Lema 3.1. *A projeção $\pi : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}$ não aumenta o comprimento das curvas.*

Demonstração. Seja $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A})$ uma curva unindo $u_0, u_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ então $\gamma := \pi(\Gamma) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ é uma curva unindo $p_0, p_1 \in \mathcal{P}$ com $p_0 = \pi(u_0)$ e $p_1 = \pi(u_1)$. Como $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} \leq \left| d\pi_{\Gamma(t)} \dot{\Gamma}(t) \right|_{\mathcal{A}}$ temos que

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt \leq \int_0^1 \left| d\pi_{\Gamma(t)} \dot{\Gamma}(t) \right|_{\mathcal{A}} dt \leq \int_0^1 \left| \dot{\Gamma}(t) \right|_{\mathcal{A}} dt = \ell(\Gamma)$$

□

Lema 3.2. *Sejam \mathcal{A} uma álgebra- C^* e $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ subálgebras- C^* de \mathcal{A} , então*

$$\varphi : \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B}')$$

não aumenta comprimento de curvas e portanto não aumenta o diâmetro.

Demonstração. Seja $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$ uma curva unindo $p_0, p_1 \in \mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, então $\gamma_2 := \varphi(\gamma_1) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}')}$ é uma curva unindo $p'_0, p'_1 \in \mathcal{P}_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}')}$ com $p'_0 = \varphi(p_0)$ e $p'_1 = \varphi(p_1)$.

Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, pelas propriedades de ínfimo temos que $\|\dot{\gamma}_2(t)\|_{\gamma_2(t)} \leq \|\dot{\gamma}_1(t)\|_{\gamma_1(t)}$. Assim,

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_2(t)\|_{\gamma_2(t)} dt \leq \int_0^1 \|\dot{\gamma}_1(t)\|_{\gamma_1(t)} dt = \ell(\gamma_1).$$

□

3.1.2 Distância entre dois pontos vs. distância entre duas fibras

A métrica quociente de Banach, por definição, não aumenta normas. Isto implica que a projeção $\pi : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}$ não aumenta o comprimento das curvas, como vimos no Lema 3.1. Isso tem uma consequência prática importante: podemos levantar o cálculo das distâncias entre os pontos $p_0, p_1 \in \mathcal{P}$ para o cálculo da distância mínima entre as fibras $\pi^{-1}(p_0)$ e $\pi^{-1}(p_1)$. Mais precisamente, temos

Lema 3.3. *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada de dimensão finita de uma álgebra- C^* \mathcal{A} com isotropia \mathcal{B} e sejam $u_0, u_1 \in \mathcal{A}, p_i = [u_i] \in \mathcal{P}$. Então a distância $d^{\mathcal{P}}(p_0, p_1)$ satisfaz*

$$d^{\mathcal{P}}(p_0, p_1) = \min_{b_0, b_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(u_0 b_0, u_1 b_1) = \min_{b_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(u_0, u_1 b_1).$$

Demonstração. Seja Γ uma curva unindo $u_0, u_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ (note que $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ é conexo por caminhos, uma vez que \mathcal{A} é de dimensão finita por hipótese; para álgebras- C^* gerais $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ pode ser desconexo, ver [16]). Então pelo Lema 3.1 o comprimento de Γ e de sua projeção $[\Gamma]$ satisfazem $\ell([\Gamma]) \leq \ell(\Gamma)$, o qual mostra que $d^{\mathcal{P}}(p_0, p_1) \leq \min_{b_0, b_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(u_0 b_0, u_1 b_1)$.

A outra desigualdade segue da *propriedade de levantamento de curvas*: dada uma curva γ unindo $p_0, p_1 \in \mathcal{P}$, existe uma curva Γ *do mesmo tamanho* em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ tal que $[\Gamma] = \gamma$ (veja a definição 3.1 e a discussão depois em [10]). Isso mostra a primeira igualdade, e a segunda segue do fato de que a ação à direita de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ em si mesma é uma isometria para o espaço métrico dado pelo comprimento das curvas em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ sob o operador norma. □

Salientamos mais uma vez como isto funciona na prática, no caso em que $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e \mathcal{B} a subálgebra de matrizes diagonais temos que:

$$\begin{aligned} (d^{\mathcal{F}_n}(p_0, p_1))^2 &= \min_{b_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} \|u_0 - u_1 b_1\|^2 \\ &= \min_{b_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} (\max \{|\lambda|; \quad \lambda \text{ é autovalor de } (u_0 - u_1 b_1)(u_0 - u_1 b_1)^*\}). \end{aligned}$$

3.1.3 Distâncias em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$

Começamos estudando as curvas mínimas no grupo unitário $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ como uma “bandeira generalizada” com \mathcal{B} trivial (colocamos as aspas porque em nossa definição de bandeira generalizada \mathcal{B} deve ter identidade). Quando consideramos o grupo unitário de uma álgebra- C^* como um espaço de comprimento em nosso contexto, temos os seguintes resultados do tipo Hopf-Rinow: (ver lemas 2.2-2.5 em [10]; compare também com a seção 3.2 em [8]).

Lema 3.4. *A função exponencial $Z \mapsto e^Z$ é um difeomorfismo de Banach entre o conjunto $\{Z \in A^{ant}, |Z| < \pi\}$ e o conjunto $\{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}), |1 - u| < 2\}$, considerando em ambos os conjuntos a topologia da norma.*

Dado $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ com $|\mathbb{1} - u| < 2$, chamamos o Z correspondente como no Lema 3.4 o logaritmo $\log(u)$ de u . Observe que da condição $|\mathbb{1} - u| < 2$ concluímos que -1 não é um autovalor de u .

Lema 3.5. *Sejam $u_0, u_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, onde \mathcal{A} é uma álgebra- C^* de dimensão finita. Então existe uma curva do grupo uniparamétrico $\gamma(t) = e^{tZ}u_0, t \in [0, 1]$ unindo u_0 e u_1 que minimiza o comprimento entre todas as curvas que unem u_0 e u_1 . Além disso, o comprimento $|Z|$ de γ é menor ou igual a π .*

A distância entre dois pontos $u_0, u_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ é dada por

$$d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(u_0, u_1) = \begin{cases} \pi, & -1 \text{ é autovalor de } u_0^{-1}u_1, \\ |\log(u_0^{-1}u_1)|, & -1 \text{ não é autovalor de } u_0^{-1}u_1. \end{cases}$$

Em particular, mostramos que o diâmetro de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ é π , mas a ferramenta importante contida na discussão anterior é a caracterização das curvas mínimas em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ como grupos uniparamétricos no Lema 3.5.

3.1.4 O diâmetro como um problema de max-min

O diâmetro, sendo o máximo de todas as distâncias possíveis, é calculado tomando o máximo de todos os elementos em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ da expressão levantada da distância no Lema 3.3. No entanto, pela homogeneidade, podemos escolher o primeiro ponto u_0 como sendo a identidade de \mathcal{A} . Então temos

Lema 3.6. *O diâmetro de \mathcal{P} é dado por*

$$\text{diam}(\mathcal{P}) = \max_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} \min_{b \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(\mathbb{1}, ub). \quad (3.1)$$

A expressão para o diâmetro dada pelo Lema 3.6 tem a desvantagem de ter que calcular um logaritmo para calcular a distância entre pontos em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. No entanto, o ponto onde o máximo é atingido pode ser calculado usando a distância *extrínseca* considerando $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ como um subespaço métrico de \mathcal{A} .

Lema 3.7. *Um ponto $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ é uma solução do problema max-min intrínseco (3.1) se, e somente se, u também é uma solução do problema max-min extrínseco*

$$e_2(\mathcal{P}) = \max_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} \min_{b \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} |\mathbb{1} - ub|^2. \quad (3.2)$$

Demonstração. A diferença entre 3.1 e 3.2 é que em 3.1 usamos a distância intrínseca $d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(\mathbb{1}, ub)$ e em 3.2 usamos a distância extrínseca $|\mathbb{1} - ub|^2$ no problema max-min devido a que é mais fácil trabalhar com a distância extrínseca, mas estas duas quantidades estão monotonicamente relacionadas. De fato, como as normas são invariantes sob conjugação, por diagonalização, segue-se que $|\mathbb{1} - u|^2 = 2 - 2 \cos(d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(\mathbb{1}, u))$ para qualquer $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ (ver o Lema 2.3 em [10]). \square

Será útil escrever $e_2(\mathcal{P})$ usando a relação fundamental da norma- C^* $|a^*a| = |a|^2$; então temos

$$e_2(\mathcal{P}) = \max_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})} \min_{b \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} |2\mathbb{1} - (ub + b^*u^*)|. \quad (3.3)$$

3.1.5 Uma condição de minimalidade nas fibras

Vamos nos concentrar agora na parte “min” do problema max-min. Todas as matrizes que a parecem nesta subseção são normais, isto é, comutam com a sua adjunta. Assim, elas são diagonalizáveis por matrizes unitárias e usaremos este fato para relacionar as operações de matrizes com os seus respectivos autovalores, por exemplo, os autovalores de e^Z são as exponenciais dos autovalores de Z .

Seja $S = ub + b^*u^*$. Note que os autovalores de S são da forma $\rho + \bar{\rho} = 2\operatorname{Re}(\rho)$ onde ρ varia no conjunto de autovalores da matriz unitária ub . A norma $|2\mathbb{1} - S|$ é então $2 - 2\operatorname{Re}(\rho_m)$, onde ρ_m é tal que sua parte real é *menor* entre todos os autovalores de ub . Uma primeira redução crucial é a seguinte:

Lema 3.8. *Seja $\mathcal{P} = \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$ uma bandeira generalizada, onde \mathcal{B} contém pelo menos a identidade. Então para cada $u \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, o mínimo $\ell = \min_{b \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} |2\mathbb{1} - (ub + b^*u^*)|$ é atingido no ponto $\hat{u} = ub$ com espectro $\{\lambda, \bar{\lambda}, \mu_1, \dots, \mu_r\}$, onde $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \operatorname{Re}(\mu_i)$ para todo $i = 1, \dots, r$.*

Demonstração. Seja $\hat{\ell} = d^{\mathcal{U}(\mathcal{A})}(\mathbb{1}, \hat{u})$. Pelo Teorema 2.6, existe uma curva uniparamétrica mínima $t \mapsto [e^{tZ}], |Z| = 1, t \in [0, \ell]$ unindo $[\mathbb{1}]$ e $[\hat{u}]$. O vetor Z sendo antisimétrico e mínimo de norma 1 implica que seu espectro tem o formato $\{-\mathbf{i}, \mathbf{i}a_1, \dots, \mathbf{i}a_r, \mathbf{i}\}$ onde $a_i \in \mathbb{R}$ estão todos contidos no intervalo $[-1, 1]$: de fato, se o maior valor próprio em valor absoluto não veio do par $-\mathbf{i}, \mathbf{i}$, podemos adicionar um múltiplo imaginário da identidade a Z para obter outro vetor \tilde{Z} na mesma classe com uma norma menor, o que contradiz a minimalidade de Z (ver Proposição 2.11). Então o lema segue de $\lambda = \cos(\hat{\ell}) + \mathbf{i} \sin(\hat{\ell}), \mu_i = \cos(a_i \hat{\ell}) + \mathbf{i} \sin(a_i \hat{\ell})$. \square

Seguem algumas observações importantes do Lema 3.8.

Observação 3.9. *O Lema 3.8 exemplifica a ligação deste trabalho com [1], que é focado no problema mínimo relativo linear, aditivo $\min_{\beta \in \mathcal{B}^{ant}} |Z + \beta|$ na álgebra de Lie que é transformada no problema não-trivial de multiplicador de Lagrange 2.6. No presente trabalho, precisamos “integrar” e trabalhar no problema mínimo relativo não-linear, multiplicativo $\min_{b \in \mathcal{U}(\mathcal{B})} |\mathbb{1} - ub|^2$.*

Observação 3.10. *Para \hat{u} tendo espectro $\{\lambda, \bar{\lambda}, \mu_1, \dots, \mu_r\}$ como no Lema 3.8, o quadrado da distância extrínseca que estamos tentando minimizar nas fibras é $|2\mathbb{1} - (\hat{u} + \hat{u}^*)| = 2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)$. Portanto, para minimizar a distância à identidade, $\operatorname{Re}(\lambda)$ deve ser maximizada.*

Observação 3.11. *Um par de autovalores $\lambda, \bar{\lambda}$ que produz distância se traduz em que a matriz S acima possui um autovalor repetido $\lambda + \bar{\lambda}$. Portanto, o mínimo é atingido em um caso extremo onde a função “maior autovalor” não é diferenciável. No entanto, veremos que o conjunto de matrizes unitárias 3×3 que tem espectro da forma $\{\lambda, \bar{\lambda}, \mu\}$ admite uma estrutura de subvariedade suave em um conjunto aberto e denso, portanto, tornando o problema mínimo passível para usar técnicas de multiplicadores de Lagrange para caracterizar mínimos nas fibras. Então o conjunto de mínimos “interessantes” aparecerá exatamente nos casos extremos do multiplicador de Lagrange.*

3.2 Pontos de mínimo nas fibras para as bandeiras completas em \mathbb{C}^3

Nesta seção vamos concentrar no caso $\mathcal{F}_3 = \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))/\mathcal{U}(\mathcal{B})$ de bandeiras completas em \mathbb{C}^3 , onde \mathcal{B} é então a subálgebra de matrizes diagonais. Vamos caracterizar o conjunto de u satisfazendo a conclusão do Lema 3.8 em termos de seus invariantes.

Lema 3.12. *Uma matriz u unitária 3×3 possui autovalores $\{\lambda, \bar{\lambda}, \mu\}$ se, e somente se, $\mathbf{Im}(\mathrm{tr}(u) - \det(u)) = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Para u satisfazendo a hipótese, temos $\mathrm{tr}(u) = \lambda + \bar{\lambda} + \mu$, $\det(u) = \lambda\bar{\lambda}\mu = \mu$, que mostra $\mathbf{Im}(\mathrm{tr}(u) - \det(u)) = 0$.

(\Leftarrow) Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ com polinômio característico $p_u(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ satisfazendo $\mathbf{Im}(\mathrm{tr}(u) - \det(u)) = -\mathbf{Im}(a_2 - a_0) = 0$. Os autovalores com módulo um implicam que $a_1 = a_0\bar{a}_2$ e portanto o traço e o determinante de u contém a informação completa do polinômio característico (isto é um caso particular do Lema 3.19). Definamos $r = -\mathbf{Re}(\mathrm{tr}(u) - \det(u)) = -\mathbf{Re}(-a_2 + a_0) = a_2 - a_0$ e $Q(x) = x^2 + rx + 1$; note que desde que $|r| \leq 2$ o discriminante de Q é não positivo e isto implica que suas raízes são $\lambda, \bar{\lambda}$. Vejamos agora que $p_u(x) = (x + a_0)Q(x)$ de onde segue o resultado. Com efeito, notemos que $(x + a_0)Q(x) = (x + a_0)(x^2 + rx + 1) = x^3 + (r + a_0)x^2 + (1 + a_0r)x + a_0$ e observemos também que $r + a_0 = a_2 - a_0 + a_0 = a_2$, $1 + a_0r = 1 + a_0\bar{r} = 1 + a_0\bar{a}_2 - a_0\bar{a}_0 = 1 + a_1 - 1 = a_1$ e com isto provamos que $p_u(x) = (x + a_0)Q(x)$. \square

Conforme a observação 3.10, para minimizar a distância de uma determinada fibra à identidade, devemos maximizar a parte real de λ , que é metade de $\mathbf{Re}(a_2 - a_0)$.

Então chegamos ao problema de maximização *suave* desejado com restrições *suaves*:

Problema 3.13. *Dado $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ fixo, maximizar, como uma função de b no conjunto de matrizes diagonais, $\mathbf{Re}(\mathrm{tr}(ub) - \det(ub))$ sujeito à restrição $\mathbf{Im}(\mathrm{tr}(ub) - \det(ub)) = 0$.*

O conjunto de possíveis soluções deste problema é o bloco de construção básico do cálculo do diâmetro:

Teorema 3.14. *Se uma matriz u realiza o mínimo na fibra da função $|\mathbb{1} - u|^2$ então ou u é a matriz identidade ou u satisfaz as duas condições seguintes:*

- (1) *A parte imaginária do traço e do determinante de u coincidem.*
- (2) *Todos os elementos da diagonal de u pertencem à mesma reta que passa pelo $\det(u)$ e tem coeficiente angular*

$$m = \frac{2\mathbf{Im}(\det(u))}{3\mathbf{Re}(\det(u)) - \mathbf{Re}(\mathrm{tr}(u))};$$

chamaremos esta reta de reta fundamental. Este item inclui o caso de coeficientes angulares infinitos correspondentes às retas verticais.

Demonstração. A primeira parte do Teorema 3.14 segue diretamente do Lema 3.8. Para a segunda parte, vamos primeiro imergir \mathbb{R}^3 nas matrizes diagonais unitárias da forma padrão $\delta(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3})$. Então o problema de restrição acima se traduz em: dado um $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ fixo,

Problema 3.15. *Maximizar*

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{Re}(\mathrm{tr}(u\delta(\theta_1, \theta_2, \theta_3)) - \det(u\delta(\theta_1, \theta_2, \theta_3)))$$

sujeito à restrição

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{Im}(\mathrm{tr}(u\delta(\theta_1, \theta_2, \theta_3)) - \det(u\delta(\theta_1, \theta_2, \theta_3))) = 0.$$

Como estamos calculando mínimos em uma órbita de uma ação de grupo, podemos supor que u é tal que o mínimo é atingido em $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, e obter condições em u em vez de $\vec{\theta}$. Precisamos fixar alguma notação: $z_k = x_k + \mathbf{i}y_k = u_{kk}$ denota os elementos da diagonal de u e $D = a + \mathbf{i}b$ é seu determinante (então $a^2 + b^2 = 1$). Calculando, temos

$$df_{\vec{0}} = -y_1 d\theta_1 - y_2 d\theta_2 - y_3 d\theta_3 + b(d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3) \quad (3.4)$$

$$dg_{\vec{0}} = x_1 d\theta_1 + x_2 d\theta_2 + x_3 d\theta_3 - a(d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3) \quad (3.5)$$

Note que o mínimo existe pela compacidade e pelo Lema 3.8 é atingido ou em uma solução do problema de multiplicador de Lagrange acima, ou em um ponto em que $dg_{\vec{0}} = 0$ e não temos a garantia de suavidade do vínculo.

Fora o caso extremo $dg_{\vec{0}} = 0$, devemos ter que a condição de multiplicador de Lagrange $df = m dg$ deve ser satisfeita. Avaliando esta condição em $\partial/\partial\theta_i$, $i = 1, 2, 3$ em (3.4), obtemos que $y_i - b = -m(x_i - a)$ e todos os elementos da diagonal estão na mesma reta que passa pelo determinante $a + \mathbf{i}b$. Avaliando agora (3.4) em $\partial/\partial\theta_1 + \partial/\partial\theta_2 + \partial/\partial\theta_3$ obtemos, usando que $\mathbf{Im}(\mathrm{tr}(u)) = \mathbf{Im}(\det(u))$,

$$2b = -y_1 - y_2 - y_3 + 3b = m(x_1 + x_2 + x_3 - 3a),$$

e a expressão para o coeficiente angular segue quando $x_1 + x_2 + x_3 \neq 3a$. Se $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$ (enquanto ainda temos $dg_{\vec{0}} \neq 0$), então a equação anterior diz que $b = 0$ e portanto $a = \pm 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = \pm 3$ que só pode acontecer para $u = \pm 1$; como $u = -1$ *maximiza* a distância até 1 em sua fibra e por hipótese sabemos que u realiza o mínimo então temos que, $u = 1$.

O caso extremo onde, $dg_{\vec{0}} = 0$ acontece se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = a$, que está contido em uma reta vertical que passa por $a \pm \mathbf{i}b$. \square

Quando o coeficiente angular é diferente de zero (isto é, $\mathbf{Im}(D) \neq 0$), o Teorema 3.14 produz a seguinte interpretação geométrica agradável da condição de minimalidade do nosso problema: o x que intercepta a reta $y - b = -m(x - a)$ é dado por $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - a)$, que é exatamente a função original $\mathbf{Re}(\lambda)$ que estamos maximizando. Geometricamente, temos

De fato, essa interpretação nos levará a concluir que o diâmetro não é atingido neste caso genérico e, em vez disso, é atingido no caso em que a reta é horizontal, onde $b = 0$, o que implica que $a = \pm 1$ e $y_i = 0$, ou seja, a reta é o eixo x e também a interpretação da interseção não é mais válida.

3.2.1 Pontos críticos regulares e o diâmetro

Observemos que tanto o Problema 3.13 quanto a conclusão do Teorema 3.14 dependem apenas da diagonal e o determinante da matriz $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$, então é natural definir a função $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3 \times S^1$, $\phi(u) = (z_1, z_2, z_3, D)$, dada pelas entradas da diagonal z_i e o determinante D de u .

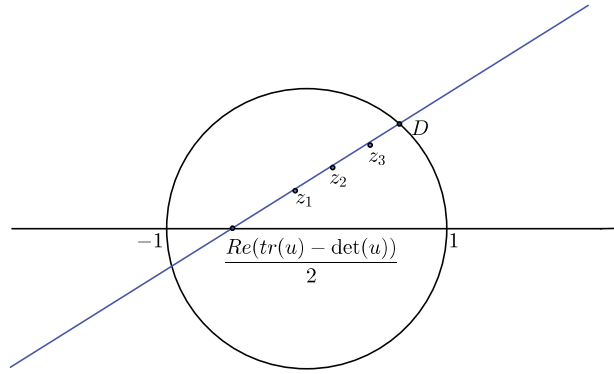


Figura 3.1: Reta fundamental

Definição 3.16. Uma matriz $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ é dita crítica se os elementos da diagonal e seu determinante satisfazem a conclusão do Teorema 3.14 (isto é, eles estão na configuração da reta fundamental da Figura 3.1 acima).

Definição 3.17. Uma matriz $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ é dita uma matriz de mínimo regular se satisfaz as condições:

- (1) u é o único mínimo (com hessiana positiva definida) nas fibras da distância até a identidade.
- (2) $d\phi_u$ tem posto máximo.
- (3) A reta fundamental não é horizontal.

Observemos que o mínimo numa fibra dada ser um ponto de mínimo regular é uma condição *aberta* na bandeira generalizada. A função que leva $p \in \mathcal{P} \rightarrow$ (ponto de mínimo na fibra de p da função distância até a identidade) é uma função bem definida e contínua na imagem pela projeção a \mathcal{P} do conjunto de mínimos regulares.

Teorema 3.18. O diâmetro de \mathcal{F}_3 não é atingido em uma matriz de mínimo regular.

Demonstração. Observemos primeiro que se u é uma matriz tal que as entradas da sua diagonal e o determinante estão numa mesma reta, então a condição $\mathbf{Im}(\text{tr}(u) - \det(u)) = 0$ é suficiente para que esta reta tenha a inclinação certa dada pela conclusão do Teorema 3.14, e consequentemente u é um ponto crítico do problema com vínculo 3.15.

Seja u um ponto de mínimo regular, com diagonal z_1, z_2, z_3 e determinante D . Como $d\phi_u$ tem posto máximo, o Teorema da Função Implícita garante a existência de uma seção $\eta : W \rightarrow \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$, $\phi \circ \eta = \text{id}_W$, onde W é uma vizinhança do ponto $(z_1, z_2, z_3, D) \in \mathbb{C}^3 \times S^1$.

Perturbemos o ponto dado projetando para pontos z'_1, z'_2, z'_3, D' numa mesma reta, à esquerda da reta original, como na Figura 3.2. Se necessário, movimentamos os pontos z'_1, z'_2, z'_3 ao longo da nova reta para satisfazer a condição $\mathbf{Im}(z'_1 + z'_2 + z'_3) = 0$. Seja $u' = \eta(z'_1, z'_2, z'_3, D')$. A matriz u' é um ponto crítico, e consequentemente mínimo por causa da unicidade e continuidade do mínimo. Este mínimo tem distância até a identidade estritamente maior que a original, que demonstra o que queríamos.

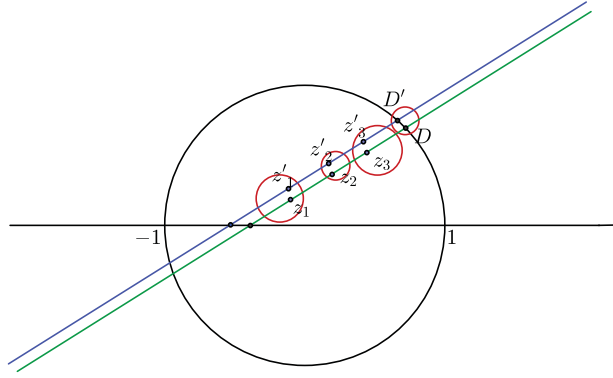


Figura 3.2: Perturbação para pontos numa mesma reta, à esquerda da reta original.

□

Para calcular o diâmetro estudamos, de forma independente, o complementar das condições (2) e (3) da Definição 3.17. O complementar da condição (2) não nos ajudou no cálculo do diâmetro porém nos levou a resultados interessantes de álgebra linear clássica os quais serão descritos na seção 3.4. O complementar da condição (3) nos levou ao princípio de máxima simetria e ao cálculo do diâmetro da bandeira generalizada \mathcal{F}_3 e outras.

3.2.2 Princípio de máxima simetria

Analisemos o complementar da condição (3) da Definição 3.17, ou seja, quando a reta fundamental é horizontal de onde obtemos que $y = 0$ pois $b = 0$ e portanto $a = \pm 1$, mais ainda $a = 1$. Por outro lado, se $\text{tr } u = x_1 + x_2 + x_3$ for negativo podemos usar a definição algébrica do subgrupo estabilizador das matrizes que possuem diagonal real para fazer que $\text{tr } u = x_1 + x_2 + x_3$ seja não negativo e que o determinante de u continue sendo $a = 1$ como se ilustra na Figura 3.3.

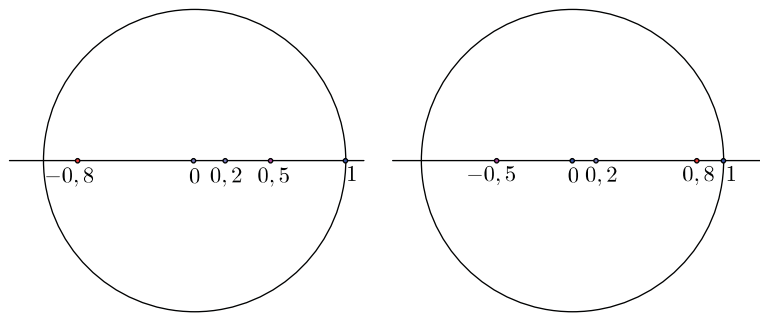


Figura 3.3: Mudando de sinal dois elementos da diagonal podemos obter um traço positivo

O próximo lema será de grande utilidade na nossa análise.

Lema 3.19. *Sejam $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ e $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ seu polinômio característico, então $\bar{a}_{n-1}a_0 = a_1$.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de u os quais tem módulo 1, então temos as seguintes igualdades de onde segue o lema.

$$\bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_n = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\lambda_2 \dots \lambda_n + \dots + \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_n}$$

□

A análise anterior nos diz que, intuitivamente, o máximo é atingido quando $\text{tr } u = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e pelo Lema 3.19 concluímos que no caso de dimensão três $\text{tr } u = 0$ implica que o polinômio característico de u é $x^3 - D$.

Definição 3.20. Seja $\{0\} \neq \mathcal{B} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ é dita maximalmente simétrica se u e toda a sua órbita $u\mathcal{U}(\mathcal{B})$ possuem polinômio característico da forma $x^n - \alpha$.

Teorema 3.21. Se $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ é maximalmente simétrica, então o diâmetro de $\mathcal{P} = \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) / \mathcal{U}(\mathcal{B})$ é $\frac{n-1}{n}\pi$, atingido na projeção de u .

Demonstração. Se $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ é maximalmente simétrica, então o mínimo das distâncias é $\frac{n-1}{n}\pi$ como podemos ver na figura abaixo

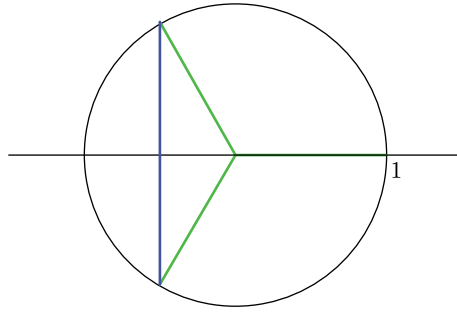


Figura 3.4: Máxima abertura e mínimo na fibra

Se $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ não é maximalmente simétrica, então a máxima abertura é maior que $\frac{2\pi}{n}$, implicando que o mínimo das distâncias é menor que $\frac{n-1}{n}\pi$ como podemos observar na figura abaixo.

$$d(1, u\mathcal{U}(\mathcal{B})) \leq d(1, u') = \pi - \frac{\theta}{2} < \pi - \frac{2\pi}{2n} = \frac{n-1}{n}\pi.$$

□

Mostraremos agora o Teorema 1

Teorema 1. O diâmetro da bandeira completa \mathcal{F}_3 é $\frac{2\pi}{3}$. Módulo homogeneidade, o diâmetro é atingido exatamente em dois pares de pontos.

Demonstração. Seja

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

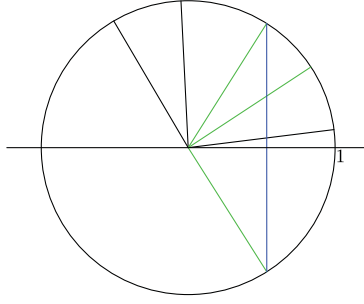


Figura 3.5: Máxima abertura e mínimo na fibra.

a matriz companheira do polinômio $x^3 - 1$. A matriz u é maximalmente simétrica, pois dado

$$u' = u \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\theta_3} \\ e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix}$$

na órbita de u , e conjugando u' pela matriz

$$p = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}$$

tal que $\theta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 = 0$ e $\theta_2 + \alpha_3 - \alpha_2 = 0$ obtemos que

$$\hat{u} = pu'p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\varphi = e^{i(\theta_3 + \alpha_1 - \alpha_3)}$ e observemos que o polinômio característico de u' é $x^3 - \varphi$. Assim, pelo teorema anterior concluímos que o diâmetro de \mathcal{F}_3 é $\frac{2\pi}{3}$ e este é atingido na projeção de u .

Veremos a seguir que se uma matriz $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ é maximalmente simétrica, então os elementos da diagonal de u são nulos. Se u é maximalmente simétrica, por definição seu polinômio característico é da forma $x^3 - \alpha$ e disto concluímos que $\text{tr } u = 0$, ou seja,

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \tag{3.6}$$

Tomando

$$\delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sabemos que $u\delta$ está na órbita de u e portanto seu polinômio característico também é da forma $x^3 - \alpha$ o qual implica que $\text{tr}(u\delta) = 0$, isto é,

$$-z_1 - z_2 + z_3 = 0 \tag{3.7}$$

Assim, somando as equações 3.6 e 3.7 obtemos que $z_3 = 0$ e de forma análoga se mostra que $z_1, z_2 = 0$.

Agora mostraremos que o diâmetro é atingido em exatamente dois pontos, a saber, as projeções de

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \alpha & 0 & c \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

uma matriz unitária, então as colunas de \hat{u} são ortonormais. Fazendo o produto interno da primeira e segunda coluna obtemos que $\beta\gamma = 0$. Se $\beta = 0$, então

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \alpha & 0 & c \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

fazendo o produto interno da segunda e terceira coluna, e da primeira e terceira coluna temos que $ab = 0$ e $\alpha c = 0$, respectivamente. Mas α não pode ser zero porque \hat{u} é unitária de onde concluímos que $c = 0$ implicando que $b \neq 0$ e portanto $a = 0$. Assim,

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

No caso em que $\gamma = 0$, usando o mesmo raciocínio obteremos que

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Os outros dois casos de bandeiras generalizadas abelianas de $M_3(\mathbb{C})$ acontecem quando dividimos por subálgebras próprias das matrizes diagonais, que módulo isometrias só podem ser da forma $\text{diag}(a, a, b)$ produzindo uma bandeira \mathcal{P}_2 ou $\text{diag}(a, a, a)$ produzindo o projetivizado do grupo unitário $\mathbb{P}U(3)$; ambas bandeiras projetam sobre a bandeira \mathcal{F}_3 da maneira tautológica descrita no Lema 3.2; assim o diâmetro de cada uma delas é a priori maior ou igual que o diâmetro $2\pi/3$ da bandeira completa \mathcal{F}_3 ; como estas subálgebras são menores que a álgebra das diagonais livres, *a fortiori* as matrizes companheiras do Teorema 1 são maximalmente simétricas e então realizam o diâmetro no quociente, que é o mesmo que \mathcal{F}_3 . Isto é um caso interessante já que contradiz a intuição “convexa” que o diâmetro deveria estritamente diminuir.

Em relação ao conjunto antipodal, os pontos que realizam o diâmetro projetam em \mathcal{F}_3 aos dois pares de pontos do Teorema 1 que realiza o diâmetro em \mathcal{F}_3 . Assim a dimensão do conjunto antipodal é a dimensão da fibra das projeções $\mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3$ e $\mathbb{P}U(3) \rightarrow \mathcal{F}_3$, que é um e dois, respectivamente.

3.3 Diâmetro de bandeiras completas e bandeiras abelianas

O Teorema 1 fornece uma demonstração imediata do Teorema 4, e o Teorema 3 segue como caso especial:

Teorema 4. Seja \mathcal{B} uma subálgebra- C^* abeliana de $M_n(\mathbb{C})$. Então o diâmetro da bandeira generalizada correspondente ao par $(M_n(\mathbb{C}), \mathcal{B})$ é $\frac{n-1}{n}\pi$.

Demonstração. Qualquer subálgebra- C^* abeliana de $M_n(\mathbb{C})$ é conjugada a uma subálgebra de matrizes diagonais. Assim, com o mesmo argumento do Teorema 1, a matriz companheira do polinômio $x^n - 1$ é maximalmente simétrica. \square

Em contraste com o caso de bandeiras abelianas de $M_3(\mathbb{C})$, a determinação do conjunto antipodal cresce exponencialmente em dificuldade com n : além de unitariedade dar relativamente menos informação, o princípio de máxima simetria é caracterizado exclusivamente pelo anulamento do traço em dimensão três, enquanto em dimensões maiores é necessário a intervenção dos outros coeficientes do polinômio característico.

Existem outras duas classes de bandeiras abelianas nas quais é possível calcular o diâmetro:

Unitários projetivizados.

Este é o caso de uma álgebra- C^* \mathcal{A} onde \mathcal{B} é a subálgebra gerada pela matriz identidade; denotamos uma tal bandeira generalizada por $\mathbb{P}U(\mathcal{A})$. Em dimensão finita, \mathcal{A} é uma álgebra de multimatrizes $M_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{n_k}(\mathbb{C})$. Seja $N = n_1 + \dots + n_k$. Então

Teorema 3.22. O diâmetro de um unitário projetivizado é $\frac{N-1}{N}\pi$, onde N é como acima.

Demonstração. Arranжемos matrizes $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathcal{U}(M_{n_1}(\mathbb{C})) \times \cdots \times \mathcal{U}(M_{n_k}(\mathbb{C}))$ tais que o conjunto dos seus autovalores formam um polígono regular de N lados no círculo unitário; assim o espectro do elemento $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ é o conjunto de raízes do polinômio $x^N - \alpha$ para algum número complexo unitário α . Como a álgebra \mathcal{B} consiste unicamente de rotações, u é um elemento maximalmente simétrico e o Teorema segue. \square

Observemos que quando $N \rightarrow \infty$ o diâmetro converge para π . Isto motiva o seguinte resultado:

Teorema 3.23. O diâmetro de qualquer bandeira generalizada de dimensão finita com \mathcal{B} não trivial é estritamente menor que π . O diâmetro de $\mathbb{P}U(B(\mathcal{H}))$, a projetivização do unitário da álgebra de operadores limitados de um espaço de Hilbert separável, é π se \mathcal{H} é de dimensão infinita.

Demonstração. O espectro de um elemento unitário de uma álgebra- C^* de dimensão finita é um número finito de pontos no círculo unitário. Se o espectro contém -1 (isto é, a distância de u até a identidade é π) existe uma rotação tal que o espectro rotacionado não contém -1 . Como \mathcal{B} é não trivial, $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ contém pelo menos os múltiplos da identidade, que agem como rotações no espectro. Assim a distância da fibra de u até a identidade é estritamente menor que π , e a parte finito dimensional do resultado segue.

Para o caso infinito dimensional, consideremos o “shift” bilateral S dado por $S(e_k) = e_{k+1}$, onde e_k são os elementos de uma base ortonormal de \mathcal{H} indexada pelos

números inteiros. É conhecido [13] que o espectro de S é o círculo unitário completo. Assim, qualquer rotação dele contém -1 e segue-se que existe um ponto no quociente a distância π da classe da identidade. \square

Assim o diâmetro do unitário projetivizado pode detectar dimensão infinita da álgebra. Parece ser um problema interessante em dimensão infinita estudar os pontos antipodais quando uma bandeira tem diâmetro exatamente π .

Produtos de Bandeiras

Consideremos agora um produto de bandeiras $\mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_k$, com os respectivos \mathcal{B}_i não necessariamente abelianos. Este espaço é ele mesmo uma bandeira abeliana $\mathcal{P} = \mathcal{U}(\mathcal{A})/\mathcal{U}(\mathcal{B})$, onde $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_k$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k$, devido a que o produto de álgebras- C^* não tem interação entre as componentes. Temos

Teorema 3.24. *O espaço \mathcal{P} acima tem como diâmetro o maior dos diâmetros das componentes \mathcal{P}_i .*

Demonstração. Como as projeções $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_i$ reduzem distâncias, $\text{diam}(\mathcal{P}) \geq \text{diam}(\mathcal{P}_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$. Seja agora $u = (u_1, \dots, u_k)$ um ponto onde o diâmetro de \mathcal{P} é atingido, e seja $X = (X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{A}^{\text{ant}} \simeq (\mathcal{A}_1)^{\text{ant}} \times \cdots \times (\mathcal{A}_k)^{\text{ant}}$ um elemento antissimétrico tal que $e^X = u$ e a curva e^{tX} , $t \in [0, 1]$, é uma curva mínima unindo a identidade a u . Então a distância $d(\mathbb{1}, u) = |X|$. Por outro lado, $e^X = u$ se traduz em $e^{X_i} = u_i$, e $|X| = |X_j| = \max\{|X_1|, \dots, |X_k|\}$ para algum índice j . Então $\text{diam}(\mathcal{P}) = d(\mathbb{1}, u_j) \leq \text{diam}(\mathcal{P}_j)$. \square

3.4 Projeções notáveis de $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$

Vimos que o problema de minimalidade associado às bandeiras completas em \mathbb{C}^3 fatora pela projeção $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3 \times S^1$ dada pelos elementos da diagonal e o determinante, o qual nos levou a pesquisar a imagem deste tipo de projeções.

Começamos estudando a projeção das diagonais. Claramente, uma condição necessária para que uma tripla (z_1, z_2, z_3) esteja na imagem é que $|z_i| \leq 1$. Porém, é fácil conseguir exemplos que mostram que está condição não é suficiente, e.g. $z_1 = z_2 = 1$ e $z_3 = 0$. Uma caracterização completa da imagem da projeção de $\mathcal{U}(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ às diagonais está dada no seguinte belo teorema devido a A. Horn [12]:

Teorema 3.25. ([12], Teorema 9) *Uma n -tupla de números complexos (z_1, \dots, z_n) são a diagonal de uma matriz unitária se, e somente se, o conjunto vetor $\vec{d} = (d_1 \dots d_n)$ das suas respectivas normas satisfaz qualquer uma das seguintes condições:*

- (1) $\sum_{j \neq i} d_j \leq n - 2 + d_i$, $0 \leq d_i \leq 1$.
- (2) \vec{d} está no fecho convexo do conjunto de pontos em \mathbb{R}^n tais que todas as suas coordenadas são 0 ou 1, e o número de coordenadas nulas não é exatamente um.
- (3) \vec{d} é a diagonal de uma matriz duplamente estocástica.

A demonstração do teorema perde o controle do determinante, e está explícito na literatura que adicionar o determinante faz o problema mais difícil, e aparentemente ainda em aberto [14]. Demonstramos a seguinte versão local:

Teorema 2. *Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$ tal que os elementos fora da diagonal satisfazem $|u_{2,1}||u_{1,3}||u_{3,2}| \neq |u_{1,2}||u_{2,3}||u_{3,1}|$. Então a derivada em u da projeção $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3 \times S^1$ dada pelos elementos diagonais e o determinante tem posto máximo.*

Este teorema é uma forma local do Teorema de Horn devido a que, usando o Teorema da Função Implícita, a imagem do conjunto descrito no Teorema 2 é *aberta*, ou seja, se o problema de encontrar uma matriz unitária com diagonal e determinante prefixado tem solução no conjunto descrito pelo Teorema 2, então para toda uma vizinhança do ponto existe solução. O Teorema 2 também oferece um contraste interessante com o Teorema de Horn, já que as condições dele são dadas em termos da diagonal, enquanto a condição que apareceu aqui foi dada em termos do complemento da diagonal.

Demonstração. Calculamos a derivada da função $\phi : \mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}^3 \times S^1$ diretamente, usando a trivialização da translação à esquerda de $T\mathcal{U}(\mathbb{M}_3(\mathbb{C}))$; isto é, calculamos $D\phi_u uX$ onde X é uma matriz antissimétrica. Escrevemos a matriz associada a esta derivada como nas coordenadas de saída e chegada dadas respectivamente por:

$$\begin{pmatrix} ix_9 + ix_7 & -x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_1 + ix_2 & ix_9 - ix_7 + x_8 & -x_5 + ix_6 \\ x_3 + ix_4 & x_5 + ix_6 & ix_9 - ix_8 \end{pmatrix}$$

como coordenadas das matrizes antissimétricas 3×3 (e, implicitamente, determinando a base da maneira tautológica). Observemos que as coordenadas diagonais foram escolhidas para isolar as matrizes de traço zero e como última coordenada os múltiplos da identidade, que produzem traço. No espaço de chegada, como base de \mathbb{C}^3 tomamos a base padrão alternando partes real e imaginária, e como base do tangente a S^1 em z tomamos iz . Calculando a derivada nesta base, obtemos a matriz

$$D\phi_u = \begin{pmatrix} a_{1,2} & -b_{1,2} & a_{1,3} & -b_{1,3} & 0 & 0 & -b_{1,1} & 0 & * \\ b_{1,2} & a_{1,2} & b_{1,3} & a_{1,3} & 0 & 0 & a_{1,1} & 0 & * \\ -a_{2,1} & -b_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,3} & -b_{2,3} & b_{2,2} & -b_{2,2} & * \\ -b_{2,1} & a_{2,1} & 0 & 0 & b_{2,3} & a_{2,3} & -a_{2,2} & a_{2,2} & * \\ 0 & 0 & -a_{3,1} & -b_{3,1} & -a_{3,2} & -b_{3,2} & 0 & b_{3,3} & * \\ 0 & 0 & -b_{3,1} & a_{3,1} & -b_{3,2} & a_{3,2} & 0 & -a_{3,3} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

onde as entradas da matriz u são $u_{k,\ell} = a_{k,\ell} + ib_{k,\ell}$. Claramente, o posto será máximo se e somente se a matriz 6×8 do canto superior esquerdo tem posto seis. Consideremos então o subdeterminante da matriz M dada pelo canto superior 6×6 :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,2} & -b_{1,2} & a_{1,3} & -b_{1,3} & 0 & 0 \\ b_{1,2} & a_{1,2} & b_{1,3} & a_{1,3} & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & -b_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,3} & -b_{2,3} \\ -b_{2,1} & a_{2,1} & 0 & 0 & b_{2,3} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & -a_{3,1} & -b_{3,1} & -a_{3,2} & -b_{3,2} \\ 0 & 0 & -b_{3,1} & a_{3,1} & -b_{3,2} & a_{3,2} \end{pmatrix}$$

Observemos que esta matriz quase representa uma transformação linear complexa de \mathbb{C}^3 nele mesmo; com efeito, ela é da forma

$$M = \begin{pmatrix} u_{1,2} & u_{1,3} & 0 \\ -u_{2,1} \circ R & 0 & u_{2,3} \\ 0 & -u_{3,1} \circ R & -u_{3,2} \circ R \end{pmatrix}$$

de blocos 2×2 que devem ser interpretados como o operador linear multiplicação pelo número complexo dado, e R representa a conjugação complexa como operador linear em \mathbb{C} considerado como espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Observemos que neste contexto, $z \circ R = R \circ \bar{z}$.

Agora dividimos a demonstração em dois casos:

Caso 1: $u_{1,2} = 0$. Além de ser um caso que deve ser considerado, este caso fornece uma boa descrição dos raciocínios a serem usados. Consideremos $\hat{M} = MP$, onde

$$P = \begin{pmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz P é claramente invertível, e

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -u_{1,3} & 0 \\ u_{2,1} & 0 & u_{2,3} \\ 0 & u_{3,1} \circ R & u_{3,2} \circ R \end{pmatrix},$$

E vemos que devido à forma por blocos da matriz \hat{M} , ela (e consequentemente M) *não* é invertível se, e somente se algum entre $u_{2,1}$, $u_{1,3}$ ou $u_{3,2}$ é nulo. Para interpretar isto, escrevemos a matriz u como ajuda visual,

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

Se $u_{2,1} = 0$, então $|u_{2,1}| = |u_{1,2}| = 0$ e ambos os lados da conclusão do Teorema 2 se anulam. O mesmo argumento vale para $u_{1,3}$ e $u_{3,2}$.

Caso 2: $u_{1,2} \neq 0$. Aqui fazemos “escalonamento”, multiplicando pela esquerda pelo análogo das matrizes elementares adequadas. Fazendo desta vez $M_1 = QM$, onde

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_{2,1}Ru_{1,2}^{-1} & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix},$$

temos que

$$M_1 = \begin{pmatrix} u_{1,2} & u_{1,3} & 0 \\ 0 & \overline{u_{2,1}}u_{1,2}^{-1}u_{1,3} & R \circ u_{2,3} \\ 0 & -\overline{u_{3,1}} & -\overline{u_{3,2}} \end{pmatrix}.$$

Assim, M_1 (e consequentemente M) é invertível se e somente se o bloco 2×2

$$B = \begin{pmatrix} \overline{u_{2,1}}u_{1,2}^{-1}u_{1,3} & R \circ u_{2,3} \\ -\overline{u_{3,1}} & -\overline{u_{3,2}} \end{pmatrix}$$

é invertível. A vantagem desta expressão é que as entradas da segunda linha comutam (já que representam multiplicação por números complexos), e então o seu determinante pode ser calculado por blocos como (veja [19])

$$\det(B) = -\det(\overline{u_{2,1}}u_{1,2}^{-1}u_{1,3}\overline{u_{3,2}} - R \circ u_{2,3}\overline{u_{3,1}}).$$

A matriz que aparece dentro do determinante no lado esquerdo da equação acima é da forma $z - R \circ w$, onde z e w são números complexos. Calculando, é simples ver que uma tal matriz tem determinante nulo se, e somente se, $|z| = |w|$. Assim vemos que neste caso, M não é invertível se e somente se $|\overline{u_{2,1}}u_{1,2}^{-1}u_{1,3}\overline{u_{3,2}}| = |u_{2,3}\overline{u_{3,1}}|$, o que se traduz em

$$|u_{2,1}||u_{1,3}||u_{3,2}| = |u_{1,2}||u_{2,3}||u_{3,1}|.$$

□

Capítulo 4

O problema do diâmetro como problema de otimização

Nesta seção apresentamos algumas considerações em relação à simulação numérica do problema de max-min. Principalmente, descrevemos os empecilhos técnicos: falta de unicidade dos mínimos, falta de diferenciabilidade e de convexidade estrita da função objetivo. Acreditamos que é interessante fazer simulações numéricas precisas para ter uma ideia da forma do conjunto antipodal e os diâmetros no contexto mais geral, tais como \mathcal{B} não abeliana. No final desta seção apresentamos um algoritmo simples que teve sucesso em calcular os mínimos em cada fibra, porém o mais perto do diâmetro que chegou está muito longe dos pontos antipodais.

4.1 Gradiente da função norma de matrizes

Lembremos que a função que leva uma matriz a um dos seus autovalores é diferenciável quando este autovalor é de multiplicidade um. Com efeito, se $M(t)$ é uma família a um parâmetro de matrizes $n \times n$ com polinômio característico $P_t(x) = x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_1(t)x + a_0(t)$. Suponhamos que temos uma família a um parâmetro $\lambda(t)$ desta família de matrizes (a existência desta família será consequência do cálculo que faremos). Então temos $P_t(\lambda(t)) \equiv 0$. Derivando, temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} a'_k(t) \lambda(t)^k + \lambda'(t) \sum_{k=1}^n k a_k(t) \lambda^{k-1}(t) = 0.$$

O coeficiente de $\lambda'(t)$ na equação acima é a derivada formal do polinômio $P_t(x)$ em relação a x avaliado em λ , que se anula se e somente se λ é uma raiz múltipla do polinômio característico. Consequentemente, sob a nossa hipótese da simplicidade da raiz λ , este coeficiente não se anula, o qual fornece via o Teorema da função implícita a existência local da extensão $\lambda(t)$ de um autovalor simples, e a fórmula

$$\lambda'(t) = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a'_k(t) \lambda(t)^k}{\sum_{k=1}^n k a_k(t) \lambda^{k-1}(t)}. \quad (4.1)$$

Em termos de derivada da função e definindo $X = M'(0)$, temos que

$$d\lambda_M(X) = - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} da_k(X) \lambda^k}{\sum_{k=1}^n k a_k \lambda^{k-1}}. \quad (4.2)$$

A expressão anterior tem duas consequências:

- O cálculo da derivada de um autovalor simples é muito caro: tem que ser calculadas todas as derivadas dos coeficientes do polinômio característico de uma matriz.
- A anulação da derivada de um autovalor simples é uma propriedade muito forte: o mesmo autovalor λ tem que ser raiz simultânea de todo possível polinômio com coeficientes $da_k(X)$, variando X .

O Lema 3.8 na subseção 3.1.5 diz que, de fato, o mínimo nas fibras não é atingido num ponto de gradiente nulo e sim num ponto onde o gradiente não existe.

4.2 Falta de regularidade da função objetivo

Aqui descrevemos como a nossa função objetivo falha em ter mínimos únicos, e como não é estritamente convexa nem diferenciável.

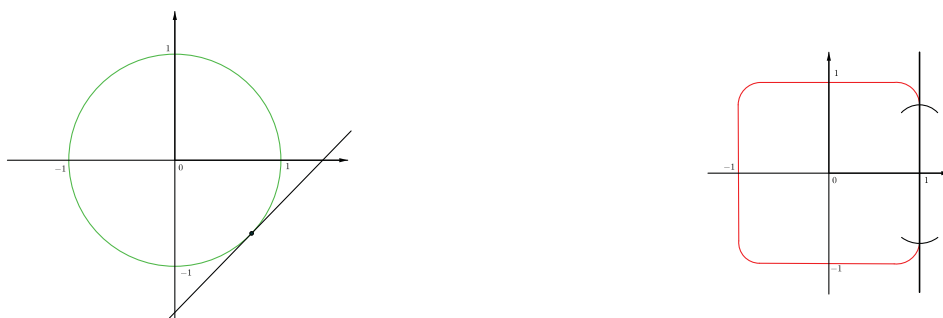


Figura 4.1: o desenho do lado esquerdo mostra a esfera unitária que provém da norma euclidiana e o do lado direito a esfera unitária que provém da norma do máximo suavizada.

Como a norma euclidiana é convexa, a esfera unitária do lado esquerdo da Figura 4.1 não contém conjuntos abertos de qualquer subespaço afim enquanto a esfera unitária do lado direito da Figura 4.1 contém conjuntos abertos de alguns subespaços afins pois a norma do máximo suavizada não é estritamente convexa e com a norma de operadores acontece o mesmo.

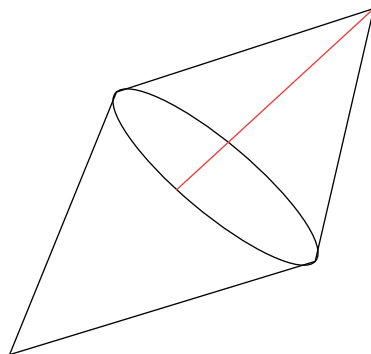


Figura 4.2: Bola unitária da norma de operadores.

O Teorema 2.5 considera a questão da existência de curvas mínimas em \mathcal{P} com um vetor velocidade inicial dado, porém devido à falta de convexidade estrita da norma

pode haver outras geodésicas com os mesmos vetores velocidade inicial.

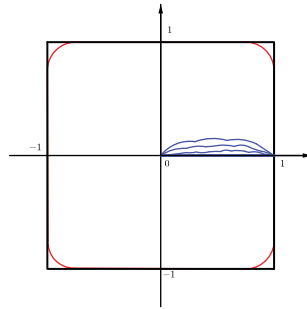


Figura 4.3: o quadrado representa a esfera unitária que provém da norma do máximo e o desenho vermelho a esfera unitária que provém da norma do máximo suavizada. As curvas azuis são geodésicas unindo os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

O fenômeno descrito acima se ilustra na Figura 4.2 em que as curvas azuis são da forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com $\dot{x}(t) > 0$ e $|\dot{y}(t)| < |\dot{x}(t)|$. Logo, $\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^1 x'(t) dt = x(1) - x(0) = 1$ e este é o mesmo comprimento do segmento de reta horizontal que une $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Observemos que o comprimento das curvas γ pode ser calculado para a norma do máximo e a norma do máximo suavizada, isto é, o fenômeno de várias geodésicas com os mesmos vetores velocidade inicial é devido à falta de convexidade estrita e não à falta de diferenciabilidade.

4.3 Algoritmo para estimar o diâmetro

1. Construir uma matriz unitária aleatória u_0 .
2. Para u_0 fixa, construir $u = u_0 \delta$ em que δ é uma discretização da diagonal $S^1 \times S^1 \times S^1$.
3. Num laço triplo correspondente a cada componente de $S^1 \times S^1 \times S^1$, calcular o máximo autovalor em módulo da matriz $2\mathbb{1} - (u + u^*)$ e tome o valor *mínimo* destes resultados e a correspondente matriz onde é atingido. Salve estes dados.
4. Repetir os passos 1, 2 e 3 para diferentes matrizes u_0 e achar o máximo dos mínimos salvados no passo 3 e a matriz onde este máximo é atingido.

Em nossos testes consideramos 10000 matrizes unitárias “aleatórias”. Cada matriz unitária “aleatória” foi construída da seguinte maneira: dados 12 números reais aleatórios, construímos dois vetores linearmente independentes em \mathbb{C}^3 . A estes vetores é aplicado o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter dois vetores ortonormais e com eles construímos um terceiro vetor em \mathbb{C}^3 usando o produto vetorial complexo.

Com essa quantidade de matrizes u_0 aleatórias o melhor resultado obtido até agora foi $\text{diam} = 2.6468$ (com distância extrínseca ao quadrado e o número certo é 3) o qual foi atingido na matriz unitária

$$\begin{pmatrix} 0.093669 + 0.065388i & -0.115797 + 0.096948i & -0.972324 + 0.136854i \\ 0.713869 + 0.676967i & 0.150645 - 0.028379i & 0.092477 - 0.007448i \\ 0.134761 + 0.029950i & 0.758666 + 0.614914i & 0.162902 - 0.026693i \end{pmatrix},$$

que não tem a forma de nenhum dos pares de matrizes onde o diâmetro de \mathcal{F}_3 é atingido.

Um método de verificação do algoritmo é que no mínimo aproximado em cada fibra, se verifica a condição $|\mathbf{Im}(tr(u) - \det(u))| < 1$.

4.4 Estimativa do erro

O fato da função objetivo ser uma função distância facilita bastante estimar o erro obtido de aproximar o mínimo via discretização: se $u\delta_0, u\delta_1$ são dois pontos na fibra, então a desigualdade triangular inversa diz que

$$|\text{dist}(\mathbb{1}, u\delta_0) - \text{dist}(\mathbb{1}, u\delta_1)| \leq \text{dist}(u\delta_0, u\delta_1) = \text{dist}(\delta_0, \delta_1).$$

Para fixar ideias, consideremos o caso de \mathcal{F}_3 descrito. Se o mínimo verdadeiro na fibra é atingido em $u\delta_0$ com $\delta_0 = \text{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3})$ e δ_1 é o elemento da forma $\text{diag}(e^{i\frac{2\pi k_1}{n}}, e^{i\frac{2\pi k_2}{n}}, e^{i\frac{2\pi k_3}{n}})$, então a diferença entre o mínimo verdadeiro e a aproximação discretizada é menor o igual a $\frac{2\pi}{n}$. O fator 2π foi escolhido para normalizar o problema no cubo $[0, 1]^3$, como é de praxe em alguns métodos numéricos.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Andruchow, L. Mata-Lorenzo, A. Mendoza, L. Recht, and A. Varela. Minimal matrices and the corresponding minimal curves on flag manifolds in low dimension. *Lin. Alg. and its Applications*, 430(8–9):1906 – 1928, 2009.
- [2] W. Arveson. *An invitation to C^* -algebra*. Springer, 1976.
- [3] J. Beyrer. A complete description of the antipodal set of most symmetric spaces of compact type. *Osaka J. Math.*, 55:567–586, 2018.
- [4] J. Conway. *A course in functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [5] G. Corach, H. Porta, and L. Recht. The geometry of spaces of projections in C^* -algebras. *Adv. in Math.*, 101(1):59–77, 1993.
- [6] K. Davidson. *C^* -algebras by example*. American Mathematical Society, 1996.
- [7] P. De la Harpe and V. Jones. *An introduction to C^* -algebras*. Université de Genève, Section de Mathématiques, 1995.
- [8] C. Durán. Finsler almost blaschke manifolds. *Houston J. of Math.*, 29(1):77 – 92, 2003.
- [9] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, and L. Recht. Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^* -algebra: Part i—minimal curves. *Adv. in Math.*, 184(2):342 – 366, 2004.
- [10] C. Durán, L. Mata-Lorenzo, and L. Recht. Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^* -algebra. part ii. geodesics joining fixed endpoints. *Int. Eq. and Operator Theory*, 53(1):33–50, 2005.
- [11] I. M. Gelfand and M. A. Naimark. On the embedding of normed rings into the ring of operators in hilbert space. *Mat. Sb.*, 12:197–213, 1943.
- [12] A. Horn. Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. *Amer. J. of Math.*, 76(3):620–630, 1954.
- [13] C. Kubrusly. *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*. Birkhäuser, New York, 2012.
- [14] L. Mirsky. Inequalities and existence theorems in the theory of matrices. *J. of Math. Analysis and Applications*, 9:99–118, 1964.
- [15] H. Porta and L. Recht. Minimality of geodesics in grassmann manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(3):464–466, 1987.

- [16] H. Porta and L. Recht. Spaces of projections in a banach algebra. *Acta Cient. Vene.*, 38(1):408–426, 1987.
- [17] S. Sakai. *C*-Algebras and W*-Algebras*. Springer, Berlin, 1971.
- [18] I. Segal. Irreducible representations of operator algebras, bull. *Amer. Math. Soc.*, 53:73–88, 1947.
- [19] John R. Silvester. Determinants of block matrices. *The Mathematical Gazette*, 84(501):460–467, 2000.

Apêndice A

Teoremas fundamentais de álgebras- C^*

Este apartado tem por finalidade apresentar os conceitos da teoria das álgebras- C^* que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. As principais referências usadas são [2, 6, 7].

A.1 Operadores limitados em espaços de Hilbert e álgebras involutivas

Nesta seção estudamos algumas noções básicas da teoria de operadores limitados em espaços de Hilbert e de álgebras involutivas que podem ser encontradas em [6, 7].

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert complexo. Denotaremos a bola unitária fechada em \mathcal{H} por $\mathcal{H}(1) = \{\xi \in \mathcal{H}; \|\xi\| \leq 1\}$ e o espaço de operadores lineares limitados em \mathcal{H} por $B(\mathcal{H})$, com a norma $\|a\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}(1)} \|a(\xi)\|$ e com isto $B(\mathcal{H})$ é uma álgebra de Banach.

A definição de operador adjunto para operadores limitados em espaços de Hilbert é a inspiração da definição de álgebra involutiva.

Definição A.1. Uma **álgebra involutiva** é uma álgebra complexa A dada juntamente com uma involução $\begin{cases} A & \rightarrow & A \\ a & \mapsto & a^* \end{cases}$ tal que todo $a, b \in A$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazem:

- $(a + b)^* = a^* + b^*$
- $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
- $(ab)^* = b^* a^*$
- $(a^*)^* = a$
- Se a álgebra possuir uma identidade, $1^* = 1$.

Proposição A.2. Seja $a \mapsto \|a\|$ uma norma na álgebra involutiva A tal que $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ para todo $a, b \in A$. Então a igualdade $\|a^* a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$ implica a igualdade $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in A$, ou seja, a involução é uma isometria.

Demonstração. Pela hipótese temos que $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|$ e isto implica que $\|a\| \leq \|a^*\|$ para todo $a \in A$. Note que $\|a^*\| \leq \|(a^*)^*\| = \|a\|$ pois $a^* \in A$ para todo $a \in A$. Logo, $\|a^*\| = \|a\|$. \square

Definição A.3. Uma álgebra involutiva A com uma norma satisfazendo $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in A$ é chamada uma **álgebra involutiva normada** e uma **álgebra involutiva de Banach** se além disso for completa com essa norma e $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ para todo $a, b \in A$.

Definição A.4. Uma **representação-*** de uma álgebra involutiva A em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é uma função linear $\Phi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ e $\Phi(a^*) = \Phi(a)^*$ para todo $a, b \in A$.

Vamos introduzir algumas classes de operadores de grande importância em análise funcional.

Definição A.5. Um operador $a \in B(\mathcal{H})$ é dito

- **Autoadjunto** se $a^* = a$.
- **Positivo** se $\langle a(\xi), \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.
- **Normal** se $a^*a = aa^*$.

Observação A.6.

- $a \in B(\mathcal{H})$ é autoadjunto se, e somente se, $\langle a(\xi), \xi \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.
- $a \in B(\mathcal{H})$ é normal se, e somente se, $\|a^*(\xi)\| = \|a(\xi)\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Definição A.7. Um operador $u \in B(\mathcal{H})$ é dito **unitário** se $u^*u = uu^* = id_{\mathcal{H}}$. O grupo unitário de $B(\mathcal{H})$ é

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{u \in B(\mathcal{H}) ; u^*u = uu^* = id_{\mathcal{H}}\}.$$

Definição A.8. Um operador linear não nulo p em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é chamado **projetor** se $p^2 = p$ e é chamado **projetor ortogonal** se for um projetor e se for autoadjunto. No que segue vamos chamar os projetores ortogonais de projeções.

Definição A.9. Seja \mathcal{H}' um outro espaço de Hilbert complexo. Um operador $w \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ é uma **isometria** se satisfaz $w^*w = id_{\mathcal{H}}$ ou, equivalentemente, $\|w(\xi)\| = \|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

A.2 Álgebras de operadores

Nesta seção apresentamos duas álgebras de operadores que são casos particulares de álgebras- C^* , cujo estudo foi feito principalmente usando [7].

A.2.1 Álgebras- C^* de operadores

Definição A.10. Uma **álgebra- C^* de operadores** é uma subálgebra involutiva de Banach de $B(\mathcal{H})$. Uma subálgebra é involutiva se $a^* \in \mathcal{A}$ sempre que $a \in \mathcal{A}$. Dada uma álgebra- C^* \mathcal{A} em $B(\mathcal{H})$, uma **subálgebra- C^*** \mathcal{B} de \mathcal{A} é uma subálgebra involutiva de Banach de \mathcal{A} .

Exemplo A.11 (trivial).

A própria álgebra $B(\mathcal{H})$ é uma álgebra- C^* de operadores em \mathcal{H} .

Exemplo A.12 (álgebra matricial).

Dado um inteiro $n \geq 1$ e o espaço de Hilbert \mathbb{C}^n , identificamos a álgebra $B(\mathbb{C}^n)$ com a álgebra $M_n(\mathbb{C})$ de matrizes complexas $n \times n$. Então $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra- C^* de operadores em $B(\mathbb{C}^n)$, a involução é dada por

$$(a^*)_{j,k} = \overline{a_{k,j}},$$

para todo $a \in M_n(\mathbb{C})$ e $j, k \in \{1, \dots, n\}$ e a norma é dada por

$$a \mapsto \|a\| = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^n \\ \|\xi\| \leq 1}} \|a\xi\| = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq n} \mu_j}$$

em que μ_1, \dots, μ_n denota os autovalores de a^*a .

Lembremos o fato básico

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$

para todo $a \in M_n(\mathbb{C})$.

A.2.2 Álgebras de Von Neumann

Vamos estudar uma classe especial de subálgebra- C^* de $B(\mathcal{H})$, conhecida como álgebra de Von Neumann. A teoria das álgebras de Von Neumann é vasta e bastante desenvolvida, porém nesta breve subseção restringimo-nos a apresentar apenas os resultados mais elementares sobre a mesma.

Já conhecemos a topologia da norma em $B(\mathcal{H})$, que muitas vezes não é a mais interessante em S' pois este raramente é separável com essa norma. Há muitas outras topologias úteis em $B(\mathcal{H})$ das quais definimos duas aqui.

Definição A.13. Para qualquer $a \in B(\mathcal{H})$ e $\xi \in \mathcal{H}$, defina

$$\nu_\xi(a) = \{b \in B(\mathcal{H}) ; \|(b-a)\xi\| < 1\}.$$

Interseções finitas dos $\nu_\xi(a)$ constituem uma base de vizinhanças de a em $B(\mathcal{H})$ para uma topologia Hausdorff localmente convexa em $B(\mathcal{H})$ que é chamada **topologia forte**.

Definição A.14. Para qualquer $a \in B(\mathcal{H})$ e $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, defina

$$\nu_{\xi,\eta}(a) = \{b \in B(\mathcal{H}) ; |\langle (b-a)\xi, \eta \rangle| < 1\}.$$

Interseções finitas dos $\nu_{\xi,\eta}(a)$ constituem uma base de vizinhanças de a em $B(\mathcal{H})$ para uma topologia Hausdorff localmente convexa em $B(\mathcal{H})$ que é chamada **topologia fraca**.

Observação A.15.

Em termos de convergência, as topologias da norma, forte e fraca podem ser descritas da seguinte forma

- $a_\alpha \rightarrow a$ uniformemente se, e somente, se $\|a_\alpha - a\| \rightarrow 0$.
- $a_\alpha \rightarrow a$ fortemente se, e somente, se $\|a_\alpha \xi - a\xi\| \rightarrow 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.
- $a_\alpha \rightarrow a$ fracamente se, e somente, se $|\langle a_\alpha \xi, \eta \rangle - \langle a\xi, \eta \rangle| \rightarrow 0$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Notemos que convergência uniforme implica convergência forte e convergência forte implica convergência fraca. De fato, suponhamos que $a_\alpha \rightarrow a$ uniformemente então para todo $\xi \in \mathcal{H}$ temos que

$$\|a_\alpha \xi - a\xi\| = \left\| (a_\alpha - a) \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\| \|\xi\| \leq \|a_\alpha - a\| \|\xi\| \rightarrow 0.$$

Suponhamos agora que $a_\alpha \rightarrow a$ fortemente, então para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ temos que

$$|\langle a_\alpha \xi, \eta \rangle - \langle a\xi, \eta \rangle| = |\langle a_\alpha \xi - a\xi, \eta \rangle| \leq \|a_\alpha \xi - a\xi\| \|\eta\| \rightarrow 0.$$

Proposição A.16.

- (1) A topologia fraca em $B(\mathcal{H})$ é mais fraca que a topologia forte, a qual é mais fraca que a topologia da norma.
- (2) As comparações de (1) são estritas quando \mathcal{H} é de dimensão infinita.

Demonstração. (1) Decorre da observação anterior.

(2) Por simplicidade de notação assumamos que \mathcal{H} é separável. Seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de \mathcal{H} . Para cada $n \in \mathbb{N}$, p_n denota a projeção de \mathcal{H} no espaço gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. Então p_n converge fortemente para $id_{\mathcal{H}}$, mas não uniformemente. Por isso, a topologia forte é estritamente mais fraca que a topologia da norma.

Seja s a deslocamento unilateral definida por $se_n = e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então para qualquer $p, q \geq 1$, o produto escalar $\langle e_p, s^k e_q \rangle$ é zero para k suficientemente grande. Segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \eta, s^k \xi \rangle = 0$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, ou seja, as potências s^k convergem fracamente para zero quando $k \rightarrow \infty$. Como $\|s^k \xi\| = \|\xi\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\xi \in \mathcal{H}$, as potências s^k não convergem fortemente para zero. Assim, a topologia fraca é estritamente mais fraca que a topologia forte. \square

Lema A.17. *Seja S um subconjunto de $B(\mathcal{H})$, então o comutante S' é fracamente fechado.*

Demonstração. Suponhamos que $(a_\alpha) \subset S'$ é tal que $a_\alpha \rightarrow a \in B(\mathcal{H})$ fracamente, ou seja, $\lim_{\alpha} \langle (a_\alpha - a)\xi, \eta \rangle = 0$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ e como para cada $s \in S$ $sa - as = s(a - a_\alpha) - (a - a_\alpha)s$ para todo α , temos que para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ vale

$$\langle (sa - as)\xi, \eta \rangle = \langle (s(a - a_\alpha) - (a - a_\alpha)s)\xi, \eta \rangle = \langle (a - a_\alpha)\xi, s^*\eta \rangle - \langle (a - a_\alpha)s\xi, \eta \rangle.$$

O lado esquerdo da cadeia de igualdades independe de α . Porém $\lim_{\alpha} \langle (a - a_\alpha)\xi, s^*\eta \rangle = \lim_{\alpha} \langle (a - a_\alpha)s\xi, \eta \rangle = 0$. Logo, concluímos que $\langle (sa - as)\xi, \eta \rangle = 0$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, mostrando que $sa = as$ e disto segue que $a \in S'$. \square

Lema A.18. *Seja S um subconjunto autoadjunto de $B(\mathcal{H})$, seja E um subespaço fechado de \mathcal{H} e seja p a projeção ortogonal de \mathcal{H} sobre E . Então, E é S -invariante se, e somente se $p \in S'$.*

Demonstração. Primeiro suponhamos que E é S -invariante, ou seja, $sp = psp$ para todo $s \in S$. Como S é autoadjunto e p é projeção ortogonal temos que

$$ps = p^*s = (s^*p)^* = (ps^*p)^* = p^*sp^* = psp = sp,$$

para todo $s \in S$. Isto mostra que $p \in S'$.

Suponhamos que $p \in S'$, isto é, $ps = sp$ para todo $s \in S$. Logo,

$$psp = spp = sp^2 = sp,$$

para todo $s \in S$ e com isto obtemos que E é S -invariante. \square

Proposição A.19 (Teorema de densidade de Von Neumann em dimensão finita). *Seja A uma subálgebra involutiva de $M_n(\mathbb{C})$ que contém a matriz identidade. Então $A'' = A$, ou seja, A é uma álgebra de Von Neumann em \mathbb{C}^n .*

Demonstração. Ver [7] (Proposition 2.13). \square

Teorema A.20 (Teorema de densidade de Von Neumann). *Seja A uma subálgebra involutiva de $B(\mathcal{H})$ que contém $id_{\mathcal{H}}$. Então A é fortemente densa em A'' .*

Demonstração. Ver [7] (Theorem 2.17) \square

Corolário A.21 (Teorema do bicomutante). *Seja A uma subálgebra involutiva de $B(\mathcal{H})$ que contém $id_{\mathcal{H}}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) A é uma álgebra de Von Neumann, ou seja, $A'' = A$,
- (2) A é fortemente fechada em $B(\mathcal{H})$,
- (3) A é fracamente fechada em $B(\mathcal{H})$.

Demonstração. (1) \Rightarrow (3) porque os comutantes são fracamente fechados como se mostrou no Lema A.17, (3) \Rightarrow (2) porque a topologia fraca é mais fraca que a topologia forte e (2) \Rightarrow (1) pelo teorema de densidade de Von Neumann. \square

A partir do teorema do bicomutante concluímos que é possível substituir a condição algébrica da definição das álgebras de Von Neumann por uma outra de caráter puramente topológico podendo as álgebras de Von Neumann ser definidas como uma subálgebra involutiva autoadjunta de $B(\mathcal{H})$ que contém a identidade e é fracamente fechada ou fortemente fechada.

As definições topológica e algébrica descrevem álgebras de Von Neumann concretamente como um conjunto de operadores agindo em algum espaço de Hilbert. Em [17] foi mostrado que álgebras de Von Neumann podem ser definidas abstratamente como álgebras- C^* que têm um predual; em outras palavras, a álgebra de Von Neumann considerada como um espaço de Banach, é o dual de algum outro espaço de Banach chamado o predual. O predual de uma álgebra de Von Neumann é único exceto por isomorfismos.

A.3 Álgebras de operadores com identidade em espaços de dimensão finita

Seja A uma subálgebra involutiva de $B(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert de dimensão finita \mathcal{H} . Assumamos que A contém o operador identidade de \mathcal{H} , denotado por $id_{\mathcal{H}}$ ou simplesmente $\mathbb{1}$. Queremos mostrar que existe um isomorfismo da forma

$$A \approx \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{M}_{n_j}(\mathbb{C})$$

ou, em outras palavras, que A é uma álgebra de multimatrizes. Também queremos construir uma inclusão de $\bigoplus_{j=1}^r \mathbb{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ em $B(\mathcal{H})$. Vamos fazer isto seguindo [7].

Podemos provar isto usando resultados clássicos de álgebra: uma álgebra involutiva de dimensão finita é semi-simples, por isso ela será a soma direta de seus ideais bilaterais, e cada um destes é isomorfo a alguma álgebra matricial inteira porque o corpo subordinado é \mathbb{C} . Mas vamos usar um outro método a seguir, lidando primeiro com álgebras- C^* abelianas de operadores, segundo com fatores, e finalmente com o caso geral.

Lembremos da Proposição A.19 que

$$\{\text{subálgebras involutivas de } \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \text{ com identidade}\} = \{\text{álgebras de Von Neumann em } \mathbb{C}^n\}$$

Lema A.22. *Seja A um subálgebra involutiva de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, seja $a \in A$ um elemento autoadjunto e μ_1, \dots, μ_s denotam os autovalores não nulos de a . Então existem projeções ortogonais $q_1, \dots, q_s \in A$ tais que*

$$a = \sum_{k=1}^s \mu_k q_k.$$

Demonstração. Pelo Teorema espectral para matrizes autoadjuntas, podemos escrever $a = \sum_{k=1}^s \mu_k q_k$ com os q_k 's sendo projeções ortogonais em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Para cada $k \in \{1, \dots, s\}$ existe um polinômio f_k tal que $f_k(\mu_l) = \delta_{k,l}$ (delta de Kronecker), e $f_k(0) = 0$, por exemplo o polinômio de Lagrange

$$f_k(T) = \frac{T \prod_{1 \leq l \leq s, l \neq k} (T - \mu_l)}{\mu_k \prod_{1 \leq l \leq s, l \neq k} (\mu_k - \mu_l)}.$$

Por conseguinte, $q_k = f_k(a) \in A$ para cada $k \in \{1, \dots, s\}$. □

Definição A.23. *Dizemos que $p \leq q$ se $pq = p$. Dizemos que um projetor $p \neq 0$ é minimal se $\rho \leq p$ implica $\rho \in \{0, p\}$.*

Proposição A.24. *Seja A uma subálgebra involutiva abeliana de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Seja $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_r\}$ o conjunto das projeções minimais em A . Então*

$$A = \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{C}p_j.$$

Demonstração. Seja $a \in A$ autoadjunto. Pelo Lema A.22 podemos escrever $a = \sum_{k=1}^s \mu_k q_k$ com $\mu_k \in \mathbb{R}^*$ e $q_k \in A$, para todo $k \in \{1, \dots, s\}$.

Seja $k \in \{1, \dots, s\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, as projeções p_j e q_k comutam, de modo que $p_j q_k$ também é uma projeção; obtemos que $p_j q_k \in \{0, p_j\}$ e $q_k = \sum_{j=1}^r p_j q_k$ pela definição de \mathcal{P} . Assim, $a = \sum_{j=1}^r \lambda_j p_j$, com cada λ_j sendo o autovalor não nulo indexado por k para o qual $p_j q_k \neq 0$. Como cada $a \in A$ é a soma de dois elementos autoadjuntos, isto finaliza a prova. \square

Observação A.25. A álgebra- C^* \mathcal{A} da proposição anterior contém a identidade $\mathbb{1} = id_{\mathcal{H}}$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^r p_j = \mathbb{1}$. No entanto, note que, nesse caso $\sum_{j=1}^r p_j$ é uma identidade multiplicativa em \mathcal{A} a qual consequentemente é uma álgebra com identidade.

Lema A.26. Seja \mathcal{A} uma subálgebra- C^* de $M_n(\mathbb{C})$ contendo $\mathbb{1}$. Então qualquer elemento $a \in \mathcal{A}$ é uma combinação linear de quatro unitários em \mathcal{A} .

Demonstração. Como $a = \|a\| \frac{a+a^*}{2\|a\|} - i \|a\| \frac{ia-ia^*}{2\|a\|}$, é suficiente verificar que qualquer elemento autoadjunto b de norma 1 em \mathcal{A} é uma combinação linear de dois unitários. Pelo Lema A.22 existem números $\mu_1, \dots, \mu_s \in [-1, 1]$ (zero é permitido desta vez) e projeções ortogonais $q_1, \dots, q_s \in \mathcal{A}$ tais que $\sum_{k=1}^s q_k = \mathbb{1}$ e $b = \sum_{k=1}^s \mu_k q_k$. Então

$$u = \sum_{k=1}^s \left(\mu_k + i\sqrt{1 - \mu_k^2} \right) q_k$$

é unitário e $b = \frac{1}{2}(u + u^*)$, o qual conclui a prova. \square

Proposição A.27. Seja A um fator em $\mathcal{H} \approx \mathbb{C}^n$ e sejam $p, q \in A$ duas projeções diferentes de zero. Então existe $a \in A$ tal que $paq \neq 0$.

Demonstração. Para cada unitário $u \in A$, seja $p_u = upu^* \in A$ a projeção de \mathcal{H} em $u(p(\mathcal{H}))$. Denotemos por e a projeção de \mathcal{H} no subespaço E de \mathcal{H} gerado pelos $u(p(\mathcal{H}))$; temos que $e \in A$. O espaço E é invariante por qualquer unitário em A , portanto também é invariante por qualquer elemento em A (ver Lema A.26). Assim, $e \in A'$ (Lema A.18). Como A é um fator $e \in \mathbb{C}id_{\mathcal{H}}$. Como $e \neq 0$ (pois $p \neq 0$), temos que $e = \mathbb{1}$.

Suponhamos agora, por absurdo que, $paq = 0$ para todo $a \in A$. Então $upu^*q = 0$ para todo elemento unitário $u \in A$, logo $eq = q = 0$ mas por hipótese $q \neq 0$. \square

Lema A.28. Seja A uma subálgebra involutiva de $M_n(\mathbb{C})$ e seja $p \in A$ uma projeção diferente de zero. Então p é minimal (entre projeções de A diferentes de zero) se, e somente se, $pAp \approx \mathbb{C}$.

Demonstração. Suponha primeiro que p é minimal. Seja $a \in pAp$ um elemento autoadjunto diferente de zero. Pelo Lema A.22 podemos escrever $a = \sum_{k=1}^s \mu_k q_k$ com $\mu_k \in \mathbb{R}^*$ e $q_k \in pAp$. Para cada $k \in \{1, \dots, s\}$, temos $p q_k = q_k$, portanto $q_k = p$ pela minimalidade de p . Em outras palavras, podemos escrever $a = \mu p$. Segue que, $\dim_{\mathbb{C}}(pAp) = 1$.

Suponha que p não é minimal e sejam $p_1, p_2 \in A$ duas projeções ortogonais não nulas tais que $p = p_1 + p_2$. Então é imediato que $\dim_{\mathbb{C}}(pAp) \geq 2$. \square

Observação A.29. O lema anterior não vale para álgebras- C^* de dimensão infinita. De fato, é fácil verificar que $\mathbb{1}$ é uma projeção minimal em $\mathcal{C}([0, 1])$, ou mais geralmente em $\mathcal{C}(X)$ para qualquer espaço compacto conexo X .

Proposição A.30. Seja A um fator em $\mathcal{H} \approx \mathbb{C}^n$. Então existe um divisor m de n tal que $A \approx \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$. Além disso, para cada projeção minimal p de A , o espaço $p(\mathcal{H})$ é um subespaço (n/m) -dimensional de \mathcal{H} .

Demonstração. Seja $e \in A$ uma projeção a qual é maximal para a propriedade “ eAe é uma álgebra matricial inteira” (isto faz sentido pelo Lema A.28). Para a primeira afirmação, temos que mostrar que $e = \mathbb{1}$. Suponhamos, por absurdo que, $e \neq \mathbb{1}$ e obtemos uma contradição.

Seja $f \in A$, $f \neq 0$ uma projeção a qual é minimal para a propriedade “ $fe = 0$ ”. Então f é minimal em A , de modo que $fAf \approx \mathbb{C}$ pelo Lema A.28. Pela Proposição A.27 podemos escolher $a \in A$ tal que $eaf \neq 0$. Também temos que $(eaf)^*eaf = fa^*eaf \neq 0$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $fa^*eaf = \lambda f$; de fato

$$\lambda \|f\xi\|^2 = \lambda \langle f\xi, f\xi \rangle = \lambda \langle \xi, f^*f\xi \rangle = \langle \xi, \lambda f\xi \rangle = \langle \xi, fa^*eaf\xi \rangle = \langle eaf\xi, eaf\xi \rangle \geq 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{C}^n$, e $\lambda > 0$. Definamos $w = \lambda^{-\frac{1}{2}}eaf$. Vejamos que

$$w^*w = \lambda^{-\frac{1}{2}}fa^*e\lambda^{-\frac{1}{2}}eaf = \lambda^{-1}fa^*eaf = \lambda^{-1}\lambda f = f,$$

a matriz w é uma isometria parcial com projeção inicial f . Como

$$eww^* = e\lambda^{-\frac{1}{2}}eaf\lambda^{-\frac{1}{2}}fa^*e = \lambda^{-\frac{1}{2}}eaf\lambda^{-\frac{1}{2}}fa^*e = ww^*$$

a projeção final de w é uma subprojeção de e , mais ainda, como f é minimal em A , segue que ww^* também é uma projeção mínima em A , e com maior razão em eAe .

Seja m um inteiro tal que $eAe \approx \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ e seja $(w_{j,k})_{1 \leq j,k \leq m}$ um sistema de matrizes unitárias em eAe . Podemos assumir que $w_{m,m} = ww^*$. Agora podemos estender $(w_{j,k})_{1 \leq j,k \leq m}$ para um sistema de matrizes unitárias de ordem $m+1$ de acordo ao esquema

$$\begin{array}{cccc} w_{1,1} & \cdots & w_{1,m} & w_{1,m}w \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{m,1} & \cdots & w_{m,m} & w_{m,m}w \\ w^*w_{m,1} & \cdots & w^*w_{m,m} & f \end{array}$$

de modo que $(e+f)A(e+f)$ é uma álgebra matricial inteira de ordem $m+1$. (Mais precisamente definamos $w_{k,m+1} = w_{k,m}w$ e $w_{m+1,k} = w^*w_{m,k}$, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$, assim como $w_{m+1,m+1} = f$). Isto contradiz a definição de e . Segue que $e = \mathbb{1}$, ou seja, A é uma álgebra matricial inteira.

Considere agora a restrição à subálgebra A do traço usual $tr : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$. Como $w_{1,k}^*w_{1,k} = w_{k,k}$ e $w_{1,k}w_{1,k}^* = w_{1,1}$, as projeções $w_{1,1}$ e $w_{k,k}$ têm o mesmo traço, para todo $k \in \{1, \dots, m\}$; este valor do traço é exatamente n/m , e a prova está completa. \square

Definição A.31. O inteiro n/m da Proposição A.30 é chamado **multiplicidade da representação** de $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemplo A.32.

$$\begin{cases} \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_6(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \end{cases}$$

é uma representação de multiplicidade 3.

Observação A.33. A Proposição A.30 mostra que qualquer subálgebra involutiva de $\mathbb{M}_6(\mathbb{C})$ que contém $\mathbb{1}$ e que é isomorfa a $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ é conjugada à imagem da inclusão acima.

Teorema A.34. Seja $\mathcal{H} \approx \mathbb{C}^n$ um espaço de dimensão finita e seja A uma subálgebra involutiva de $B(\mathcal{H}) \approx \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ que contém a identidade. Sejam p_1, \dots, p_r as projeções minimais no centro $Z(A)$ de A . Então existem inteiros estritamente positivos n_1, \dots, n_r tais que $p_j A p_j \approx \mathbb{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, e

$$A \approx \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{M}_{n_j}(\mathbb{C}).$$

Além disso, se μ_j denota a multiplicidade da representação de $p_j A p_j$ em $B(p_j \mathcal{H})$, então $\sum_{j=1}^r \mu_j n_j = n$.

Demonstração. Temos que $A = \bigoplus_{j=1}^r p_j A p_j$ pela definição dos p_j 's e $Z(A) = \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{C} p_j$ pela Proposição A.24. O teorema segue da Proposição A.30. \square

A.4 Álgebras- C^* abstratas e cálculo funcional

Esta seção é uma introdução às álgebras- C^* gerais [6, 7], com uma certa ênfase na teoria espectral, no cálculo funcional e no estudo dos elementos positivos dessa álgebra. Como veremos mais adiante álgebras- C^* têm uma relação íntima com a teoria de operadores em espaços de Hilbert, até mesmo porque a álgebra $B(\mathcal{H})$ é um exemplo básico de álgebra- C^* .

A.4.1 Definições e primeiros exemplos

Definição A.35. Uma **álgebra- C^*** é uma álgebra involutiva de Banach \mathcal{A} cuja norma satisfaz

$$\|a^* a\| = \|a\|^2, \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}.$$

Observação A.36. É um fato conhecido que $\|aa^*\| = \|a\|^2$ para todo $a \in B(\mathcal{H})$, isto mostra que qualquer álgebra involutiva fechada de $B(\mathcal{H})$ é uma álgebra- C^* .

Definição A.37. Uma **subálgebra- C^*** de uma álgebra- C^* \mathcal{A} é uma subálgebra involutiva de \mathcal{A} a qual é completa com a norma.

Definição A.38. Um **morfismo** $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre duas álgebras- C^* é uma função linear tal que

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$$

$$\Phi(a^*) = \Phi(a)^*,$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Lembremos que uma **representação** de uma álgebra- C^* \mathcal{A} em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é um morfismo $\mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$.

Exemplo A.39 (Álgebra- C^* de funções contínuas).

Seja X um espaço localmente compacto. A álgebra $\mathcal{C}_0(X)$ de funções contínuas $X \rightarrow \mathbb{C}$ que se anulam no infinito é uma álgebra- C^* com a norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Esta álgebra possui uma identidade se, e somente se, X é compacto, em tal caso ela é a álgebra- C^* $\mathcal{C}(X)$ de todas as funções contínuas em X .

Exemplo A.40 (Álgebras involutivas de Banach que não são álgebras- C^*).

- Na álgebra $A = \mathcal{C}([-1, 1])$ de funções contínuas de $[-1, 1]$ a \mathbb{C} , consideremos a norma definida por $\|f\| = \sup_{|t| \leq 1} |f(t)|$ e a involução definida por $f^{*!}(t) = \overline{f(-t)}$.

Então A é uma álgebra de Banach com uma involução tal que $\|f^{*!}\| = \|f\|$ para todo $f \in A$. Mas A não é uma álgebra- C^* ; de fato, para f definida por $f(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $f(t) = t$ para $t \geq 0$, temos que $\|f\| = 1$ e $f^{*!}f = 0$.

- Na álgebra convolutiva $A = \ell^1(\mathbb{Z})$, consideremos a norma definida por $\|c\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c(n)|$ e a involução definida por $c^{*!}(n) = \overline{c(-n)}$. Então A também é uma álgebra de Banach com uma involução tal que $\|c^{*!}\|_1 = \|c\|_1$ para todo $c \in A$. Mas A não é uma álgebra- C^* ; de fato, para c definida por $c(1) = c(0) = -c(-1) = 1$ e $c(n) = 0$ para $|n| \geq 2$, temos que $\|c\|_1 = 3$ e $\|c^{*!}c\|_1 = 3$.

A.4.2 Espectro de um elemento em uma álgebra de Banach

Alguns dos resultados da teoria espectral são gerais, sendo válidos para qualquer álgebra de Banach, outros são específicos de álgebras- C^* . Na presente subseção, consideramos uma álgebra de Banach A com identidade. O espectro de a pode ser considerado como o conjunto de “autovalores generalizados” de a pois qualquer autovalor verdadeiro de a está no espectro.

Definição A.41. Para cada $a \in A$, o **espectro** de a é o subconjunto

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda \mathbb{1} - a \quad \text{não é invertível em } A\}$$

do plano complexo.

A partir do próximo lema vamos definir o raio espectral de um elemento em uma álgebra de Banach.

Lema A.42. Para cada $a \in A$, a sequência $\left(\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\alpha_n = \log \|a^n\|$, então temos que $\|a^{p+q}\| \leq \|a^p\| \|a^q\|$. Assim,

$$\alpha_{p+q} \leq \alpha_p + \alpha_q$$

para cada $p, q \geq 1$. Logo, a sequência subaditiva $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o seu mínimo. Vejamos a prova.

Escolhamos um inteiro $q \geq 1$, escrevemos cada inteiro $n \in \mathbb{N}$ como $n = kq + r$ com $k \geq 0$ e $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Temos

$$\frac{\alpha_n}{n} = \frac{\alpha_{kq+r}}{kq+r} \leq \frac{\alpha_{kq} + \alpha_r}{kq+r} \leq \frac{\alpha_{kq}}{kq} + \frac{\alpha_r}{kq} \leq \frac{\alpha_q}{q} + \frac{\alpha_r}{kq}.$$

Segue que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \leq \inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_q}{q}.$$

Como temos obviamente que $\inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_q}{q} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n}$, também temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_q}{q},$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|a\|$. □

Definição A.43. O *raio espectral* de $a \in A$ é o número real

$$\rho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Equivalentemente, $\rho(a)^{-1}$ é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n$. Notemos que $\rho(a) \leq \|a\|$.

Lema A.44. Seja $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então temos que

- (1) Se $|\lambda| < \rho(a)^{-1}$, o elemento $\mathbb{1} - \lambda a$ é invertível em A .
- (2) Se $|\lambda| > \rho(a)$, então $\lambda \notin \sigma(a)$.
- (3) O conjunto A^{inv} de elementos invertíveis em A é aberto e a função

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A^{\text{inv}} & \longrightarrow & A^{\text{inv}} \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array} \right.$$

é contínua.

Demonstração. (1) Se $\rho(\lambda a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^n a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\lambda|^n \|a\|^n)^{\frac{1}{n}} = |\lambda| \rho(a) < 1$. Segue da Definição A.43 que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n$ é convergente e seu limite é $(\mathbb{1} - \lambda a)^{-1}$ o qual implica que $\mathbb{1} - \lambda a$ é invertível em A .

(2) Se $|\lambda| > \rho(a)$, ou seja, $|\lambda|^{-1} < \rho(a)^{-1}$ o item anterior implica que $\lambda \mathbb{1} - a = \lambda(\mathbb{1} - (\lambda^{-1}a))$ é invertível. Disso, obtemos que $\lambda \notin \sigma(a)$.

(3) Seja $a \in A^{\text{inv}}$, para cada $b \in A$ tal que $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ o elemento

$$b = a(\mathbb{1} - a^{-1}(a - b))$$

está em A^{inv} pois $\rho(a^{-1}(a - b)) \leq \|a^{-1}(a - b)\| \leq \|a^{-1}\| \|a - b\| < 1$. Logo, A^{inv} é aberto.

Se $\|b - a\| < \frac{1}{2} \|a^{-1}\|^{-2} \varepsilon$ temos que

$$\begin{aligned} \|b^{-1} - a^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}(a - b))^n a^{-1} - a^{-1} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}(a - b))^n a^{-1} \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a^{-1}(a - b)\|^n \|a^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|a^{-1}\|^2 \|a - b\|}{1 - \|a^{-1}(a - b)\|} \\ &\leq 2 \|a^{-1}\|^2 \|a - b\| \\ &\leq 2 \|a^{-1}\|^2 \frac{1}{2} \|a^{-1}\|^{-2} \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, a função $a \mapsto a^{-1}$ é contínua em A^{inv} . □

Na seguinte proposição damos uma espécie de generalização da definição de raio espectral que já conhecemos.

Proposição A.45. *Para cada $a \in A$, o espectro $\sigma(a)$ é um subconjunto compacto não vazio de \mathbb{C} que está contido no disco fechado de raio $\rho(a)$ centrado na origem, e obviamente no disco fechado de raio $\|a\|$ ao redor da origem. Além disso, o raio espectral de a é dado por*

$$\rho(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Demonstração. O segundo item do Lema A.44 mostra que $\sigma(a)$ está contido no disco fechado de raio $\rho(a)$ ao redor da origem, e o último item mostra em particular que $\sigma(a)$ é fechado em \mathbb{C} . Assim, o espectro $\sigma(a)$ é compacto.

O último item do Lema A.44 também mostra que $(\lambda \mathbb{1} - a)^{-1}$ está dado ao redor de qualquer $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ por uma série inteira em $\lambda - \lambda_0$, isto é, que a **resolvente** de a

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \sigma(a) & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda \mathbb{1} - a)^{-1} \end{cases}$$

é uma função analítica. Se $\sigma(a)$ for vazio, a resolvente seria uma função holomorfa, limitada, não constante definida em todo \mathbb{C} , em contradição com o Teorema de Liouville. Logo, o espectro $\sigma(a)$ é não vazio.

Se $\rho(a) = 0$, é claro que $\sigma(a) = \{0\}$. Suponhamos agora que $\rho(a) \neq 0$. Se o espectro $\sigma(a)$ estiver contido em algum disco fechado centrado na origem de raio $r < \rho(a)$, a resolvente $\lambda \mapsto (\lambda \mathbb{1} - a)^{-1} = \lambda^{-1} (\mathbb{1} - \lambda^{-1} a)^{-1}$ seria analítica no domínio definido por $|\lambda| > r$. Então a função $z \mapsto (\mathbb{1} - za)^{-1}$ seria definida e analítica no disco aberto de raio r^{-1} ao redor de 0 e sua série de Taylor na origem $\sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n$ teria raio de convergência $r^{-1} > \rho(a)^{-1}$, contradizendo a definição de $\rho(a)$, assim a prova está completa. □

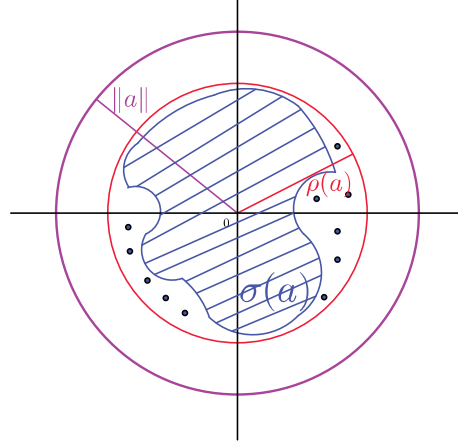


Figura A.1: O espectro de um operador a é um subconjunto compacto contido no disco fechado de raio $\rho(a)$ centrado na origem, o qual está contido no disco fechado de raio $\|a\|$ centrado na origem. A região hachurada é o espectro contínuo e os pontos são o espectro discreto.

A Figura A.1 ilustra geometricamente a Proposição A.45.

Teorema A.46 (Teorema de Gelfand-Mazur [7]). *Uma álgebra de Banach com identidade A na qual todos os elementos diferentes de zero são invertíveis é isomorfa ao corpo de números complexos.*

Demonstração. Para cada $a \in A$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \mathbb{1} - a$ não é invertível ($\sigma(a) \neq \emptyset$), assim por hipótese $\lambda \mathbb{1} - a = 0$, ou $a \in \mathbb{C}$. \square

Lema A.47 (Teorema da aplicação espectral). *Seja um polinômio $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ definido para λ em \mathbb{C} . Para $a \in A$ definimos $\tilde{p}(a) = a_0 + a_1a + \dots + a_na^n \in A$. Então*

$$\sigma(\tilde{p}(a)) = p(\sigma(a))$$

para todo $a \in A$, em que $p(\sigma(a)) := \{p(\lambda); \lambda \in \sigma(a)\}$.

Demonstração. O lema é válido para polinômios constantes porque o espectro é não vazio pela Proposição A.45, portanto podemos supor que p não é constante. Na prova a seguir usaremos repetidamente o seguinte fato: se a é um produto $a_1 \dots a_n$ de fatores comutantes na álgebra, então a é invertível se, e somente, se cada a_j é invertível.

Seja $\lambda_0 \in \sigma(a)$, o polinômio $p(\lambda) - p(\lambda_0)$ tem λ_0 como raiz. Logo, $p(\lambda) - p(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$ em que g é um polinômio de grau $n - 1$. Como $a - \lambda_0 \mathbb{1}$ não é invertível,

$$\tilde{p}(a) - p(\lambda_0)\mathbb{1} = (a - \lambda_0\mathbb{1})g(a)$$

não é invertível. Assim, $p(\lambda_0) \in \sigma(\tilde{p}(a))$ e com isto provamos que $p(\sigma(a)) \subset \sigma(\tilde{p}(a))$.

Seja $\mu_0 \in \sigma(\tilde{p}(a))$, e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ as n raízes do polinômio $p(\lambda) - \mu_0$ em \mathbb{C} e como $a_n \neq 0$ temos que $p(\lambda) - \mu_0 = a_n(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ o que implica

$$\tilde{p}(a) - \mu_0\mathbb{1} = a_n(a - \lambda_1\mathbb{1}) \dots (a - \lambda_n\mathbb{1}).$$

Como $\tilde{p}(a) - \mu_0\mathbb{1}$ não é invertível, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a - \lambda_j\mathbb{1}$ não é invertível. Como $p(\lambda_j) = \mu_0$, isto mostra que $\mu_0 \in p(\sigma(a))$ e com isto concluímos que $\sigma(\tilde{p}(a)) \subset p(\sigma(a))$. \square

A.4.3 Espectro de um elemento em uma álgebra- C^*

A proposição que segue nos permite localizar com mais precisão o espectro de operadores autoadjuntos e unitários. Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* com identidade e denotemos por \mathbb{S}^1 o círculo unitário do plano complexo.

Proposição A.48.

- (1) Para cada $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a^*) = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C}; \lambda \in \sigma(a)\}$.
- (2) Se $a \in \mathcal{A}$ é autoadjunto, seu espectro está em \mathbb{R} .
- (3) Se $u \in \mathcal{A}$ é unitário, seu espectro está em \mathbb{S}^1 .

Demonstração. (1) Para $\lambda \in \mathbb{C}$, o elemento $\bar{\lambda}\mathbb{1} - a^*$ é invertível (digamos com inversa b) se e somente se $\lambda\mathbb{1} - a$ é invertível (com inversa b^*).

(2) Seja $\lambda = x + iy \in \sigma(a)$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ o número $x + i(y + t)$ está em $\sigma(a + it\mathbb{1})$. Como a é autoadjunto obtemos que

$$\|a + it\mathbb{1}\|^2 = \|(a + it\mathbb{1})(a - it\mathbb{1})\| = \|a^2 + t^2\mathbb{1}\| \leq \|a\|^2 + t^2,$$

portanto a Proposição A.45 implica que

$$|x + i(y + t)|^2 = x^2 + (y + t)^2 \leq \|a + it\mathbb{1}\|^2 \leq \|a\|^2 + t^2$$

e esta desigualdade também pode ser escrita como

$$2yt \leq \|a\|^2 - x^2 - y^2.$$

Como isto é válido para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $y = 0$. Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Seja $\lambda \in \sigma(u)$. Observemos que $\lambda \neq 0$, pois u é invertível, e que $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$, porque $\lambda^{-1}\mathbb{1} - u^{-1} = -\lambda^{-1}(\lambda\mathbb{1} - u)u^{-1}$ não é invertível. Pela Proposição A.45 obtemos que

$$|\lambda| \leq \|u\| = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{|\lambda|} = |\lambda^{-1}| \leq \|u^{-1}\| = 1$$

e por conseguinte $\lambda \in \mathbb{S}^1$. □

Corolário A.49. *Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento normal. Então*

$$\rho(a) = \|a\|.$$

Em particular, se $a \in \mathcal{A}$ é autoadjunto, então ao menos um destes números $\|a\|$, $-\|a\|$ está no espectro $\sigma(a)$.

Demonstração. Suponhamos primeiro que a é autoadjunto. Da definição de álgebras- C^* temos

$$\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$$

para todo $k \geq 0$, assim

$$\rho(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{2^k}\|^{2^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|a\|^{2^k})^{2^{-k}} = \|a\|.$$

Segue da Proposição A.45 e Proposição A.48(2) que ao menos um dos números $\|a\|$, $-\|a\|$ está em $\sigma(a)$.

Agora suponhamos que a é normal. Então

$$\begin{aligned}
 \rho(a^2) &\leq \|a^2\| && \text{por Lema A.42} \\
 &\leq \|a\|^2 = \|a^*a\| = \rho(a^*a) && \text{pelo argumento anterior} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*a)^n\|^{\frac{1}{n}} && \text{por definição de } \rho \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*)^n a^n\|^{\frac{1}{n}} && \text{porque } a \text{ é normal} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*)^n\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \\
 &= \rho(a^*)\rho(a) && \text{por definição de } \rho \\
 &= \rho(a)^2 && \text{por Proposição A.48(1)} \\
 &= \rho(a^2) && \text{por Lema A.47.}
 \end{aligned}$$

Logo, todas as desigualdades são igualdades, e $\rho(a)^2 = \|a\|^2$.

Corolário A.50. Para qualquer $a \in \mathcal{A}$, temos que

$$\|a\|^2 = \rho(a^*a).$$

Demonstração. Pela definição de álgebra- C^* $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ e como a^*a é autoadjunto pela proposição anterior $\|a^*a\| = \rho(a^*a)$. Logo, $\|a\|^2 = \rho(a^*a)$. \square

Há um procedimento muito importante para aplicação de funções a operadores chamado cálculo funcional. Polinômios com coeficientes complexos podem ser aplicados a qualquer operador de uma forma óbvia. Para operadores autoadjuntos e, mais geralmente, para operadores normais, este cálculo funcional pode ser definido para funções contínuas.

Teorema A.51. [Cálculo funcional contínuo para operadores limitados autoadjuntos] Seja A uma álgebra com identidade, seja $a \in A$ um elemento autoadjunto, e seja $\mathcal{C}(\sigma(a))$ a álgebra- C^* de funções contínuas no espectro de a . Então existe um único morfismo de álgebras- C^*

$$\begin{cases} \mathcal{C}(\sigma(a)) & \longrightarrow & A \\ f & \longmapsto & f(a) \end{cases}$$

que leva a função constante 1 (respectivamente a inclusão de $\sigma(a)$ em \mathbb{C}) ao operador $id_{\mathcal{H}}$ (respectivamente a a). Além disso, temos que

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

para todo $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$.

Demonstração. Denotemos por $\mathcal{P}(\sigma(a))$ a subálgebra involutiva de $\mathcal{C}(\sigma(a))$ que consiste das restrições a $\sigma(a)$ das funções polinômiais $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, e $\mathbb{C}[a]$ a subálgebra involutiva de A que consiste dos elementos $f(a)$ com $f \in \mathbb{C}[\lambda]$ um polinômio complexo de uma variável. Uma consequência direta do Lema A.47 e do Corolário A.49 é que $\|f(a)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |f(\lambda)| =$

$\|f\|$ para todo $f \in \mathbb{C}[\lambda]$, isto é, que o morfismo óbvio

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\sigma(a)) & \longrightarrow & \mathbb{C}[a] \\ f & \longmapsto & f(a) \end{cases}$$

está bem definido e é uma isometria. Pelo Teorema de aproximação de Weierstrass, esta tem uma extensão isométrica de $\mathcal{C}(\sigma(a))$ à subálgebra- C^* $C^*(a)$ de A gerada por a (a qual também é o fecho de $\mathbb{C}[a]$ em A). Fixemos agora uma função $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$ e verifiquemos que $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Consideremos primeiro $\mu \in f(\sigma(a))$. Escolhamos $\lambda \in \sigma(a)$ tal que $\mu = f(\lambda)$. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{P}(\sigma(a))$ com limite f . Então $(f_n(\lambda)\mathbb{1} - f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\mu\mathbb{1} - f(a)$. Como $f_n(\lambda)\mathbb{1} - f_n(a)$ não é invertível para cada $n \in \mathbb{N}$ pelo Lema A.47, segue do Lema A.44(3) (o conjunto dos elementos não invertíveis em A é fechado) que $\mu \in \sigma(f(a))$. Portanto, $f(\sigma(a)) \subset \sigma(f(a))$.

Consideremos agora $\mu \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(a))$. A função g definida por $g(t) = (\mu - f(t))^{-1}$ está em $\mathcal{C}(\sigma(a))$ e $g(a) = (\mu\mathbb{1} - f(a))^{-1}$, assim $\mu \notin \sigma(f(a))$. Logo, $\sigma(f(a)) \subset f(\sigma(a))$. \square

A.4.4 Teorema de Gelfand-Naimark

O Teorema de Gelfand-Naimark foi um ponto significativo no desenvolvimento da teoria das álgebras- C^* , uma vez que estabeleceu a possibilidade de considerar uma álgebra- C^* como uma estrutura algébrica abstrata sem referência a casos particulares (álgebra de operadores).

Definição A.52. *Seja A uma álgebra comutativa complexa. Um **character** em A é um funcional linear $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ não nulo tal que*

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

para todo $a, b \in A$. O conjunto de todos os caracteres em A é denotado por \mathcal{C}_A .

Observação A.53. *Se A possui uma identidade, $\chi(\mathbb{1}) = 1$ para qualquer $\chi \in \mathcal{C}_A$. Com efeito, $\chi(\mathbb{1}) = \chi(\mathbb{1}\mathbb{1}) = \chi(\mathbb{1})\chi(\mathbb{1})$. Se $\chi(\mathbb{1}) = 0$, então $\chi(a) = \chi(a\mathbb{1}) = \chi(a)\chi(\mathbb{1}) = 0$ para todo $a \in A$ porém χ é não nulo. Assim, $\chi(\mathbb{1}) \neq 0$ e portanto $\chi(\mathbb{1}) = \chi(\mathbb{1})\chi(\mathbb{1})$ implica que $\chi(\mathbb{1}) = 1$.*

Teorema A.54. *Se A é uma álgebra de Banach comutativa, qualquer $\chi \in \mathcal{C}_A$ satisfaz $|\chi(a)| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. Em particular, todo character é limitado.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo que, existe $a \in A$ tal que $|\chi(a)| > \|a\| \geq 0$. Tomemos $\tilde{a} = \frac{a}{|\chi(a)|}$ e observe que $|\chi(\tilde{a})| = 1$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\chi(a) = 1$ e assim $\|a\| \leq 1$ donde segue que a série $b = \sum_{n \geq 1} a^n$ converge. Note que

$$a + ab = a + a \sum_{n \geq 1} a^n = a + \sum_{n \geq 2} a^n = \sum_{n \geq 1} a^n = b,$$

portanto $\chi(a) + \chi(a)\chi(b) = \chi(b)$, isto é, $\chi(a)(1 + \chi(b)) = \chi(b)$ e usando que $\chi(a) = 1$ obtemos que $1 = 0$ o qual é absurdo. Logo, $|\chi(a)| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$ e por conseguinte χ é limitado e $\|\chi\| \leq 1$. \square

Corolário A.55. *Se A é uma álgebra de Banach comutativa com identidade, todo $\chi \in \mathcal{C}_A$ é contínuo e de norma 1.*

Demonstração. Pelo teorema acima, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon$ de modo que, para todo $a, b \in A$ tais que $\|a - b\| < \delta$ implica $|\chi(a) - \chi(b)| = |\chi(a - b)| \leq \|a - b\| < \delta = \varepsilon$. Logo, χ é contínuo.

Novamente pelo teorema anterior sabemos que $\|\chi\| \leq 1$ e pela Observação A.53 temos que $1 = \chi(\mathbb{1}) = |\chi(\mathbb{1})| \leq \|\chi\| \|\mathbb{1}\| = \|\chi\|$. Assim, $\|\chi\| = 1$. \square

Proposição A.56. *Se \mathcal{A} é uma álgebra- C^* comutativa com identidade, qualquer $\chi \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ satisfaz $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Demonstração.

Se $a^* = a$ então $\chi(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$ pela Proposição A.48(2). Assim, para qualquer $a \in \mathcal{A}$, temos

$$\chi(a^*) = \chi\left(\frac{a + a^*}{2} + i\frac{ia - ia^*}{2}\right) = \chi\left(\frac{a + a^*}{2}\right) + i\chi\left(\frac{ia - ia^*}{2}\right) = \overline{\chi(a)}$$

.

Para qualquer álgebra comutativa complexa A , definimos em \mathcal{C}_A a topologia de convergência pontual, ou seja, $\chi_n \rightarrow \chi$ se $\chi_n(a) \rightarrow \chi(a)$ para todo $a \in A$. Se A é uma álgebra de Banach comutativa com identidade, pelo Corolário A.55 obtemos que \mathcal{C}_A está contido na bola unitária do dual de A e podemos provar que \mathcal{C}_A é fechada na topologia de convergência pontual e pelo Teorema de Banach Alaoglu ([4]) concluímos que \mathcal{C}_A é compacto nesta topologia. \square

Definição A.57. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa. A transformada de Gelfand é o homomorfismo*

$$\widehat{\cdot}: A \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}_A) \quad (\text{A.1})$$

definido por $\widehat{a}(\chi) = \chi(a)$ para todo $a \in A$ e para todo $\chi \in \mathcal{C}_A$.

Notemos que a transformada de Gelfand está bem definida, pois, dada $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_A$ tal que $\chi_n \rightarrow \chi$ na topologia de convergência pontual, isto é, $\chi_n(a) \rightarrow \chi(a)$ para todo $a \in A$, segue que $\widehat{a}(\chi_n) \rightarrow \widehat{a}(\chi)$ para todo $a \in A$ e portanto $\widehat{a} \in \mathcal{C}_0(\mathcal{C}_A)$.

Lema A.58. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com identidade e seja $\widehat{\cdot}: A \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}_A)$ a transformada de Gelfand correspondente. Então*

$$\sigma(\widehat{a}) = \sigma(a)$$

para todo $a \in A$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma(\widehat{a})$, então existe $\chi \in \mathcal{C}_A$ tal que

$$(\lambda \mathbb{1} - \widehat{a})(\chi) = \chi(\lambda \mathbb{1} - a) = 0.$$

Assim, $\lambda \mathbb{1} - a$ não é invertível e $\lambda \in \sigma(a)$.

Seja $\lambda \in \sigma(a)$, pelo Lema de Zorn existe um ideal maximal τ em A que contém $\lambda \mathbb{1} - a$; observemos que τ é fechado em A (ver Lema A.44(2)). Então A/τ é uma álgebra de Banach e um corpo, portanto é isomorfo ao corpo dos números complexos pelo Teorema de Gelfand Mazur. A projeção canônica $A \rightarrow A/\tau$ pode ser vista como um caracter $\chi \in \mathcal{C}_A$ tal que $\chi(\lambda \mathbb{1} - a) = 0$. Logo, $(\lambda \mathbb{1} - \widehat{a})(\chi) = 0$ e $\lambda \in \sigma(\widehat{a})$. \square

Em geral, a transformada de Gelfand é um isomorfismo de álgebras $A \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}_A)$ que não preserva a estrutura métrica, porém no caso em que \mathcal{A} é uma álgebra- C^* a transformada de Gelfand preserva todo tipo de estrutura como veremos no resultado a seguir.

Teorema A.59 (Teorema de Gelfand-Naimark [7]). *Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* comutativa. Então a transformada de Gelfand*

$$\widehat{\cdot}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}_A)$$

definida em (A.1) é um isomorfismo isométrico com a norma do lado direito como no Exemplo A.39.

Demonstração.

Provemos que a transformada de Gelfand é uma isometria, primeiro vejamos que esta é uma contração fraca, ou seja, $\|\widehat{a}\| \leq \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Pelo Teorema A.54 temos que

$$\|\widehat{a}\| = \sup_{\chi \in \mathcal{C}_A} |\widehat{a}(\chi)| = \sup_{\chi \in \mathcal{C}_A} |\chi(a)| \leq \sup_{\chi \in \mathcal{C}_A} \|a\| = \|a\| \quad \text{para todo } a \in \mathcal{A}.$$

Por outro lado, pelo lema anterior sabemos que $\sigma(\widehat{a}) = \sigma(a)$ e isto implica que $\rho(\widehat{a}) = \rho(a)$, vamos usar isto para provar a desigualdade contrária. Seja $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^* = a$, pelo Corolário A.49 sabemos que $\|a\| = \rho(a) = \rho(\widehat{a})$ e pela Proposição A.45 obtemos que $\rho(\widehat{a}) \leq \|\widehat{a}\|$. Logo, $\|a\| \leq \|\widehat{a}\|$ e assim $\|\widehat{a}\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^* = a$.

Para $a \in \mathcal{A}$ qualquer, provemos que $\|\widehat{aa^*}\| = \|\widehat{a}\|^2$. Pela Proposição A.56, para todo $\chi \in \mathcal{C}_A$ temos que

$$\widehat{aa^*}(\chi) = \chi(aa^*) = \chi(a)\chi(a^*) = \chi(a)\overline{\chi(a)} = |\chi(a)|^2.$$

Portanto,

$$\|\widehat{aa^*}\| = \sup_{\chi \in \mathcal{C}_A} \|\widehat{aa^*}(\chi)\| = \sup_{\chi \in \mathcal{C}_A} |\chi(a)|^2 = \sup_{\chi \in \mathcal{C}_A} |\widehat{a}(\chi)|^2 = \|\widehat{a}\|^2$$

e pelo caso anterior,

$$\|\widehat{a}\|^2 = \|\widehat{aa^*}\| = \|aa^*\| = \|a\|^2,$$

concluindo que $\|\widehat{a}\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Das propriedades dos caracteres segue que a transformada de Gelfand é um homomorfismo- $*$ e pelo fato desta transformada ser uma isometria garantimos a injetividade da mesma.

Por último, lembremos que \mathcal{C}_A é compacto na topologia de convergência pontual e vejamos que a imagem da transformada de Gelfand separa pontos de \mathcal{C}_A ; se $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{C}_A$ com $\chi_1 \neq \chi_2$ existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$, isto é, $\widehat{a}(\chi_1) \neq \widehat{a}(\chi_2)$. Também temos que a imagem é uma subálgebra com identidade de $\mathcal{C}(\mathcal{C}_A)$, então pelo teorema de Stone-Weierstrass a imagem da transformada de Gelfand é densa em $\mathcal{C}(\mathcal{C}_A)$ e com isto concluimos a sobrejetividade. \square

A.4.5 Elementos positivos de álgebras- C^*

Definição A.60. Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* , um elemento $a \in \mathcal{A}$ é dito **positivo** se é autoadjunto e satisfaz $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, ou seja, $\sigma(a) \subset [0, \|a\|]$. Denotaremos por \mathcal{A}_+ o conjunto de elementos positivos de \mathcal{A} .

Proposição A.61. Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* com identidade.

(1) Para um elemento autoadjunto $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| \leq 1$, temos que

$$a \in \mathcal{A}_+ \iff \|\mathbb{1} - a\| \leq 1.$$

(2) O conjunto \mathcal{A}_+ é fechado no conjunto de elementos autoadjuntos de \mathcal{A} que denotaremos por \mathcal{A}_{sa} .

Demonstração. (1) Se $a \in \mathcal{A}_+$, temos que $\sigma(a) \subset [0, \|a\|] \subset [0, 1]$. Assim, $\sigma(\mathbb{1} - a)$ está também em $[0, 1]$, logo $\|\mathbb{1} - a\| \leq 1$ pelo Corolário A.49.

Se $\|\mathbb{1} - a\| \leq 1$, temos que $\sigma(a - \mathbb{1}) \subset [-1, 1]$ pela Proposição A.45 e Proposição A.48(2). Então $\sigma(a) = 1 + \sigma(a - \mathbb{1}) \subset [0, 2]$.

(2) Para $a \in \mathcal{A}_{sa}$ temos que $a \in \mathcal{A}_+$ se, e somente se, $\| \|a\| \mathbb{1} - a \| \leq \|a\|$ por (1), portanto \mathcal{A}_+ é fechado em \mathcal{A}_{sa} . \square

Teorema A.62. O conjunto \mathcal{A}_+ de elementos positivos de uma álgebra- C^* \mathcal{A} com identidade, é um cone convexo fechado em \mathcal{A}_{sa} e tem a propriedade $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.

Demonstração. \mathcal{A}_+ é fechado pela Proposição A.61(2), e λa obviamente está em \mathcal{A}_+ sempre que $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathcal{A}_+$. Sejam $a, b \in \mathcal{A}_+$ tais que $\|a\| \leq 1$ e $\|b\| \leq 1$, temos $\|\mathbb{1} - a\| \leq 1$ e $\|\mathbb{1} - b\| \leq 1$ pela Proposição A.61(1). Assim,

$$\left\| \mathbb{1} - \frac{1}{2}(a + b) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\mathbb{1} + \frac{1}{2}\mathbb{1} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \right\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbb{1} - a\| + \frac{1}{2}\|\mathbb{1} - b\| \leq 1$$

e $\frac{1}{2}(a + b) \in \mathcal{A}_+$ pelo mesmo lema. Seja $a \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$, então $\sigma(a) = \{0\}$, logo $a = 0$ pelo Corolário A.49. \square

O próximo lema nos diz que o espectro de ab e o espectro de ba podem diferir apenas no conjunto $\{0\}$.

Lema A.63. Seja A uma álgebra complexa com identidade e sejam $a, b \in A$. Então

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}.$$

Em particular, se A é uma álgebra- C^* e se $b \in A$, então $\sigma(bb^*) \subset [0, \infty)$ se, e somente se, $\sigma(b^*b) \subset [0, \infty)$.

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda\mathbb{1} - ab$ tem inversa, provemos que

$$(\mathbb{1} + b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}a)(\lambda\mathbb{1} - ba) = \lambda\mathbb{1}.$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}a)(\lambda\mathbb{1} - ba) &= (\lambda\mathbb{1} - ba) + b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}a(\lambda\mathbb{1} - ba) \\ &= \lambda\mathbb{1} - ba + b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}(\lambda a - aba) \\ &= \lambda\mathbb{1} - ba + b(\lambda\mathbb{1} - ab)^{-1}(\lambda\mathbb{1} - ab)a \\ &= \lambda\mathbb{1} - ba + ba \\ &= \lambda\mathbb{1} \end{aligned}$$

e analogamente se demonstra que $(\lambda \mathbb{1} - ba)(\lambda \mathbb{1} + b(\lambda \mathbb{1} - ab)^{-1}a) = \lambda \mathbb{1}$. Logo, $\lambda \mathbb{1} - ba$ é invertível com inversa $\frac{\mathbb{1} + b(\lambda \mathbb{1} - ab)^{-1}a}{\lambda}$ e com isto temos que, se $\lambda \notin \sigma(ab)$ com $\lambda \neq 0$ então $\lambda \notin \sigma(ba)$, isto é, $\sigma(ba) \cup \{0\} \subset \sigma(ab) \cup \{0\}$. De forma similar se prova que $\sigma(ab) \cup \{0\} \subset \sigma(ba) \cup \{0\}$.

□

A seguinte proposição fornece algumas condições equivalentes à positividade.

Proposição A.64. *Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* . Para cada $a \in \mathcal{A}_{sa}$, as três propriedades seguintes são equivalentes:*

- (1) $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$, isto é, $a \in \mathcal{A}_+$,
- (1) existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^*b$,
- (3) existe $b \in \mathcal{A}_{sa}$ tal que $a = b^2$.

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{A}_{sa}$. (3) \Rightarrow (1) segue da Proposição A.48(2), a qual implica que $\sigma(b) \subset \mathbb{R}$, e do Lema A.47, temos que qualquer $\mu \in \sigma(a)$ é da forma $\mu = \lambda^2 \geq 0$ para algum $\lambda \in \sigma(b)$. (1) \Rightarrow (3) segue do Teorema A.51 porque se pode definir $b = \sqrt{a}$. (3) \Rightarrow (2) é óbvia.

Finalmente provemos (2) \Rightarrow (3). Sejam $f_+, f_- \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definidas por

$$f_+(t) = \sup\{t, 0\} \quad f_-(t) = \sup\{-t, 0\},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $a = b^*b$ como em (2), definamos

$$\begin{aligned} a_+ &= f_+(a) \in \mathcal{A}_{sa} & a_- &= f_-(a) \in \mathcal{A}_{sa} \\ x_+ &= \sqrt{f_+(a)} \in \mathcal{A}_{sa} & x_- &= \sqrt{f_-(a)} \in \mathcal{A}_{sa} \end{aligned}$$

e observemos que

$$a = a_+ - a_- = x_+^2 - x_-^2 \quad x_+x_- = 0$$

porque relações similares valem em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Por outro lado, temos

$$-(x_-b^*)(x_-b^*)^* = -x_-ax_- = -x_-x_+^2x_- + x_-^4 = x_-^4 \in \mathcal{A}_+, \quad (\text{A.2})$$

a inclusão vale porque (3) \Rightarrow (1). Por outra parte, escrevendo $x_-b^* = s + it$ com $s, t \in \mathcal{A}_{sa}$, obtemos

$$\begin{aligned} (x_-b^*)^*(x_-b^*) &= -(x_-b^*)(x_-b^*)^* + (s + it)(s - it) + (s - it)(s + it) \\ &= -(x_-b^*)(x_-b^*)^* + 2s^2 + 2t^2 \in \mathcal{A}_+, \end{aligned}$$

a inclusão vale porque $-(x_-b^*)(x_-b^*)^* \in \mathcal{A}_+$, como mostramos anteriormente, e porque $2s^2 + 2t^2 \in \mathcal{A}_+$. Segue do Teorema A.62 e do Lema A.63 que

$$(x_-b^*)(x_-b^*)^* \in \mathcal{A}_+. \quad (\text{A.3})$$

Em consequência, (A.2) e (A.3) implicam que $x_-^4 = 0$, ou seja, $x_- = 0$ e $a = x_+^2$. □

A noção de positividade em álgebras- C^* \mathcal{A} , discutida anteriormente, permite definir uma relação de ordem parcial no conjunto \mathcal{A}_+ .

Definição A.65. Dada uma álgebra- C^* \mathcal{A} , se a, b são elementos autoadjuntos de \mathcal{A} dizemos que $a \geq b$ se $a - b \in \mathcal{A}_+$.

Observação A.66. Dizemos que $a \leq b$ se $a - b \in -\mathcal{A}_+$, ou seja, se $b \geq a$. Note que se $a \geq b$ e $a \leq b$ então $a = b$ pois, como vimos no teorema anterior $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.

Notemos que, nem todo elemento é comparável. A relação de ordem definida acima conduz a alguns resultados não triviais, como o exposto na proposição seguinte.

Proposição A.67. Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* com identidade e seja $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \geq 0$, então $\|a\| \mathbb{1} \geq a \geq 0$.

Demonstração. Se $a \geq 0$ então $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Logo, pelo Lema A.47, $\sigma(\|a\| \mathbb{1} - a) = \{\|a\| \lambda; \lambda \in \sigma(a)\} \subset \{\|a\| \mathbb{1} - \lambda; \lambda \in [0, \|a\|]\} = [0, \|a\|]$, provando que $\|a\| \mathbb{1} \geq a \geq 0$.

□

A.5 Estados e construção GNS

A conexão entre álgebras- C^* e espaços de Hilbert é feita via a noção de estado [6, 7]. A construção GNS [7] foi descoberta independentemente por I.M. Gelfand e M.A. Naimark [11] e I. Segal [18], embora muito simples, é uma construção engenhosa e uma das ideias fundamentais da teoria de álgebras de operadores. Esta fornece um método para construir representações de álgebras- C^* .

A.5.1 Estados

Definição A.68. Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* . Uma forma linear $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ é **positiva** se $\phi(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Observação A.69. Para todo funcional linear ϕ em \mathcal{A} existe uma forma sesquilinear associada (\cdot, \cdot) em $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, definida por $(a, b) = \phi(b^*a)$. Note que quando ϕ é um funcional linear positivo sua forma sesquilinear associada é semi-definida positiva e portanto satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Em termos de ϕ isto é

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a) \quad (\text{A.4})$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Com efeito, para $t \in \mathbb{C}$ qualquer

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi((a + tb)^*(a + tb)) &= \phi(a^*a + \bar{t}tb^*b + \bar{t}b^*a + ta^*b) \\ &= \phi(a^*a) + |t|^2 \phi(b^*b) + \bar{t}\phi(b^*a) + t\phi(a^*b) \\ &= |t|^2 \phi(b^*b) + 2\operatorname{Re}(\bar{t}\phi(b^*a)) + \phi(a^*a). \end{aligned}$$

Para $t = re^{i\theta}$ tal que $\bar{t}\phi(b^*a) = e^{-i\theta}\phi(b^*a) = |\phi(b^*a)|$, obtemos que

$$0 \leq r^2 \phi(b^*b) + 2r |\phi(b^*a)| + \phi(a^*a)$$

o qual implica que o discriminante é não positivo, ou seja,

$$4r^2 |\phi(b^*a)|^2 - 4r^2 \phi(b^*b)\phi(a^*a) \leq 0,$$

implicando que $|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a)$ como desejávamos.

Proposição A.70. *Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* com identidade. Uma forma linear ϕ em \mathcal{A} é positiva se, e somente se, é limitada e $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$.*

Demonstração. Suponhamos que ϕ é positiva. Para cada $a \in \mathcal{A}$ temos que $\|a^*a\| \mathbf{1} - a^*a \geq 0$ pela Proposição A.61(1), logo

$$\phi(a^*a) \leq \|a^*a\| \phi(\mathbf{1}).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.4), temos consequentemente

$$|\phi(a)| \leq \phi(\mathbf{1})^{\frac{1}{2}} \phi(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq \|a^*a\|^{\frac{1}{2}} \phi(\mathbf{1}) = \|a\| \phi(\mathbf{1}).$$

Segue que $\|\phi\| \leq \phi(\mathbf{1})$. É óbvio que $\phi(\mathbf{1}) \leq |\phi(\mathbf{1})| \leq \|\phi\|$.

Suponhamos que ϕ é limitada e $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$. Substituindo ϕ por $\phi/\|\phi\|$, podemos assumir que $\phi(\mathbf{1}) = 1$. Primeiro mostremos que ϕ toma valores reais em elementos autoadjuntos. Escolha $a \in \mathcal{A}$, $a^* = a$, e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\phi(a) = \alpha + i\beta$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\|a + i\lambda\mathbf{1}\|^2 = \|(a - i\lambda\mathbf{1})(a + i\lambda\mathbf{1})\| = \|a^2 + \lambda^2\mathbf{1}\| \leq \|a\|^2 + \lambda^2$$

(a última igualdade é pelo Corolário A.49) e por conseguinte

$$\begin{aligned} \beta^2 + 2\lambda\beta + \lambda^2 &\leq \alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 = |\alpha + i(\beta + \lambda)|^2 = |\alpha + i\beta + i\lambda|^2 \\ &= |\phi(a) + i\lambda\phi(\mathbf{1})|^2 \\ &= |\phi(a + i\lambda\mathbf{1})|^2 \\ &\leq \|a + i\lambda\mathbf{1}\|^2 + \lambda^2, \end{aligned}$$

isto implica que $\beta = 0$.

Provemos que ϕ toma valores positivos em elementos positivos. Escolha $h \in \mathcal{A}_+$ e fazendo $\tilde{h} = \gamma^2 h$ podemos supor que $0 \leq h \leq \mathbf{1}$. Então

$$|1 - \phi(h)| = |\phi(\mathbf{1} - h)| \leq \|\mathbf{1} - h\| \leq 1$$

e pela Proposição A.61(1) $\phi(h) \in \mathcal{A}_+$. Assim, $\phi(h) \geq 0$. □

Definição A.71. Um **estado** em uma álgebra- C^* \mathcal{A} é uma forma linear em \mathcal{A} que é positiva e de norma 1.

Observação A.72. Pela Proposição A.70 para todo estado $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ com \mathcal{A} uma álgebra- C^* com identidade se cumpre que $\phi(\mathbf{1}) = 1$.

Exemplo A.73. Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* de operadores em um espaço de Hilbert \mathcal{H} que contém $\text{id}_{\mathcal{H}}$ e seja $\xi \in \mathcal{H}(1)$ um vetor de norma 1. Então a forma linear

$$\omega_{\xi} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & \langle a\xi, \xi \rangle \end{array}$$

é positiva. Se além disso $\text{id}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}$ (ou mais geralmente se além disso $\overline{\mathcal{A}\mathcal{H}} = \mathcal{H}$) neste caso ω_{ξ} é chamado um **vetor estado**. Observemos que

$$\omega_{\xi} = \omega_{e^{it}\xi}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

A definição de estado deixa ainda aberta a questão da existência de estados não nulos em álgebras- C^* mas isso é garantido pela seguinte proposição.

Proposição A.74. *Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* e seja $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$. Então existe um estado ϕ em \mathcal{A} tal que $\phi(a^*a) > 0$.*

Demonstração. Sabemos do Teorema A.62 que \mathcal{A}_+ é um cone convexo fechado em \mathcal{A}_{sa} . Como $-a^*a \notin \mathcal{A}_+$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe uma forma linear $\tilde{\phi} : \mathcal{A}_{sa} \rightarrow \mathbb{R}$ de norma 1 que é positiva em \mathcal{A}_+ e estritamente negativa em $-a^*a$. A extensão \mathbb{C} -linear ϕ de $\tilde{\phi}$ a \mathcal{A} é um estado tal que $\phi(-a^*a) < 0$. \square

A.5.2 Construção GNS

Vamos apresentar um dos resultados fundamentais da teoria de álgebras- C^* , o qual fornece um método de construção de representações de uma álgebra- C^* a partir de um estado na mesma álgebra, isto vai levar à conclusão de que qualquer álgebra- C^* pode ser representada como uma álgebra- C^* de operadores em um espaço de Hilbert.

Teorema A.75 (construção GNS). *Seja \mathcal{A} uma álgebra- C^* com identidade e seja $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ um estado. Então existem: um espaço de Hilbert \mathcal{H}_ϕ , uma representação $\pi_\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H}_\phi)$ e um vetor $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ de norma 1 tal que*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a) (\xi_\phi), \xi_\phi \rangle,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e tal que ξ_ϕ é cíclico para π_ϕ , isto é, tal que $\overline{\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi} = \mathcal{H}_\phi$.

Demonstração. Definamos $V_\phi = \{a \in \mathcal{A}; \phi(a^*a) = 0\}$. Para $a \in V_\phi$ e $b \in \mathcal{A}$, temos também $\phi(b^*a) = 0$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.4). Então

$$V_\phi = \{a \in \mathcal{A}; \phi(b^*a) = 0 \text{ para todo } b \in \mathcal{A}\}$$

e V_ϕ é um ideal esquerdo fechado em \mathcal{A} . A forma sesquilinear positiva $(a, b) \mapsto \phi(b^*a)$ em \mathcal{A} define uma forma sesquilinear positiva no quociente \mathcal{A}/V_ϕ dada por

$$\langle a + V_\phi, b + V_\phi \rangle = \phi(b^*a),$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Isto faz de \mathcal{A}/V_ϕ um espaço pré-Hilbert. Definamos \mathcal{H}_ϕ como sendo seu completamento e ξ_ϕ como sendo o vetor $1 + V_\phi \in \mathcal{A}/V_\phi \subset \mathcal{H}_\phi$.

Para cada $a \in \mathcal{A}$, $L_a : \mathcal{A}/V_\phi \rightarrow \mathcal{A}/V_\phi$ denota a multiplicação esquerda $b + V_\phi \mapsto ab + V_\phi$. Para calcular $\|L_a\|$, consideremos a forma linear positiva definida em \mathcal{A} por $a \mapsto \phi(b^*ab)$, a qual é limitada e de norma $\phi(b^*b)$ pela Proposição A.70. Temos que

$$\begin{aligned} \|L_a(b + V_\phi)\|^2 &= \langle L_a(b + V_\phi), L_a(b + V_\phi) \rangle = \langle ab + V_\phi, ab + V_\phi \rangle \\ &= \phi(b^*a^*ab) \\ &\leq \phi(b^*b) \|a^*a\| \\ &= \|a\|^2 \phi(b^*b) \\ &= \|a\|^2 \langle b + V_\phi, b + V_\phi \rangle \\ &= \|a\|^2 \|b + V_\phi\|^2. \end{aligned}$$

Logo, $\|L_a\| \leq \|a\|$ e portanto L_a se estende a um operador limitado em \mathcal{H}_ϕ que denotamos por π_ϕ . A função $\pi_\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H}_\phi)$ é uma representação tal que

$$\phi(a) = \phi(1^*a) = \langle a1 + V_\phi, 1 + V_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a) (1 + V_\phi), 1 + V_\phi \rangle = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e tal que

$$\overline{\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi} = \overline{\pi_\phi(\mathcal{A})(\mathbb{1} + V_\phi)} = \overline{\{a\mathbb{1} + V_\phi; a \in \mathcal{A}\}} = \overline{\mathcal{A}/V_\phi} = \mathcal{H}_\phi$$

com $\|\xi_\phi\|^2 = \langle \mathbb{1} + V_\phi, \mathbb{1} + V_\phi \rangle = \phi(\mathbb{1}^*\mathbb{1}) = \phi(\mathbb{1}) = 1$.

□

Apêndice B

Curvas mínimas em espaços associados às álgebras- C^*

Neste apêndice apresentamos alguns resultados de [10] que já foram apresentados de forma breve na seção 2.1

B.1 Bandeiras generalizadas

B.1.1 Representações de Grassmann e reflexões isotrópicas

Definição B.1. *Seja $\rho_0 \in \mathcal{P}$ fixo e seja r_0 uma reflexão unitária de um espaço de Hilbert, isto é, $r_0^* = r_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $r_0^2 = \mathbb{1}$. Dizemos que uma representação $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ é uma **representação de Grassmann** em ρ_0 com respeito a r_0 , se para cada elemento $g \in \mathcal{U}_{\rho_0}$ sua imagem $\phi(g) \in B(\mathcal{H})$ está no comutante de r_0 em $B(\mathcal{H})$, ou seja, $\phi(g)r_0 = r_0\phi(g)$.*

Denotemos por $Gr(\mathcal{H})$ a variedade de Grassmann de \mathcal{H} a qual é justamente o conjunto de reflexões unitárias de \mathcal{H} . A Grassmanniana $Gr(\mathcal{H})$ é um espaço homogêneo sob o grupo unitário da álgebra- C^* $B(\mathcal{H})$. Por meio da representação definida acima, podemos considerar $Gr(\mathcal{H})$ como um espaço homogêneo sob o grupo unitário \mathcal{U} de \mathcal{A} . Para qualquer representação de Grassmann em ρ_0 com respeito a r_0 , consideremos a função $F : \mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H})$, dada como segue: tomemos qualquer $g \in \mathcal{U}$ que satizfaz $\rho = L_g\rho_0$, então

$$F(\rho) = \phi(g)r_0\phi(g)^{-1}.$$

F está bem definida pela hipótese do comutante de r_0 .

B.2 Funções que reduzem comprimento

A ideia principal na prova do teorema principal do artigo estudado neste capítulo é a seguinte. Primeiro, dado um vetor tangente $X \in T_\rho\mathcal{P}$, encontrar funções $F_X : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ que reduzem comprimento, em que \mathcal{S} é a esfera de raio $1/2$ de um certo espaço de Hilbert \mathcal{H} no qual \mathcal{A} está representado. As geodésicas de \mathcal{S} são as usuais bem conhecidas grandes círculos parametrizados por comprimento de arco, e para levantamentos mínimos Z de X , a imagem de $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$ sob F_X é um grande círculo na esfera. Como as funções são redutoras de comprimento, segue que γ minimiza comprimento entre seus extremos para comprimentos até $\pi/2$.

As funções que reduzem comprimento devem usar fatoração através da grassmanniana $Gr(\mathcal{H})$, da álgebra- C^* $B(\mathcal{H})$ no qual a álgebra- C^* dada \mathcal{A} está representada: $\mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$. Cada uma destas funções reduzirá o comprimento das curvas, e as curvas cujo comprimento é preservado são curvas mínimas.

Notemos que essas construções são extrínsecas, em princípio dependem de uma representação de \mathcal{A} na álgebra dos operadores limitados de um espaço de Hilbert, e também dependem da função $F : \mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H})$, a qual está definida em termos da representação. Nas seções B.4 e B.5 usamos a teoria GNS de representações de álgebras- C^* para construir representações baseadas em dados intrínsecos.

Apresentamos condições suficientes para construir funções que reduzem comprimento da bandeira generalizada à variedade de Grassmann da forma $Gr(\mathcal{H}) = Gr(B(\mathcal{H}))$ em que \mathcal{H} é algum espaço de Hilbert.

Lembremos que a estrutura de Finsler do espaço homogêneo $Gr(\mathcal{H})$ é obtida como segue. Para $X \in T_r Gr(\mathcal{H})$ temos,

$$\|X\|_r = \frac{1}{2} |X|,$$

em que X é identificado com um elemento de $B(\mathcal{H})$ (ver [5]).

Proposição B.2. *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada. Para qualquer representação de Grassmann $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ de \mathcal{A} em ρ_0 com respeito a r_0 , a função correspondente F reduz comprimento, isto é, $\|T_\rho F(X)\|_{F(\rho)} \leq \|X\|_\rho$, para todo $\rho \in \mathcal{P}$, $X \in T_\rho \mathcal{P}$.*

Demonstração. Ver [9] (Proposition 3.1) □

A seguir, apresentamos funções que reduzem comprimento $m_\xi : Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$ de $Gr(\mathcal{H})$ na esfera unitária $\mathcal{S} = \{\eta \in \mathcal{H}; \|\eta\| = 1\}$. Consideremos \mathcal{S} como uma variedade riemanniana com a métrica dada por $\|W\|_\eta = \frac{1}{2} \|W\|$, para cada $\eta \in \mathcal{S}$ e $W \in T_\eta \mathcal{S}$.

Para cada $\xi \in \mathcal{S}$, considere a função $m_\xi : Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$ dada por:

$$m_\xi(r) = r(\xi).$$

Proposição B.3. *A função $m_\xi : Gr(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}$ reduz comprimento.*

Demonstração. Consideremos uma curva $r(t)$ em $Gr(\mathcal{H})$ com $\dot{r}(0) = Y \in T_{r(0)} Gr(\mathcal{H})$. A curva imagem é $m_\xi(r(t)) = r(t)\xi$, então

$$T_{r(0)} m_\xi(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (m_\xi \circ r)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} m_\xi(r(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r(t)\xi = \dot{r}(0)\xi = Y\xi.$$

Logo,

$$\|T_{r(0)} m_\xi(Y)\|_{r(0)\xi} = \|Y\xi\|_{r(0)\xi} = \frac{1}{2} \|Y\xi\| \leq \frac{1}{2} \|Y\| = \|Y\|_{r(0)}.$$

□

Para $\xi \in \mathcal{S}$, definimos a função $F_\xi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ por

$$F_\xi(\rho) = F(\rho)\xi.$$

Corolário B.4. *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada. Para qualquer representação de Grassmann de \mathcal{A} em ρ_0 com respeito a r_0 , e qualquer $\xi \in \mathcal{S}$, a função F_ξ reduz comprimento.*

Demonstração. Observando que $F_\xi = m_\xi \circ F$ e como cada uma dessas funções reduz comprimento temos

$$\|T_\rho F_\xi(X)\|_{F_\xi(\rho)} = \|T_\rho(m_\xi \circ F)(X)\|_{m_\xi(F(\rho))} = \|T_{F(\rho)}m_\xi(T_\rho F(X))\|_{m_\xi(F(\rho))} \leq \|T_\rho F(X)\|_{F(\rho)} \leq \|X\|_\rho,$$

para todo $\rho \in \mathcal{P}$, $X \in T_\rho \mathcal{P}$. \square

B.3 Condições geométricas para minimalidade

B.3.1 Condições de minimalidade para uma representação de Grassmann dada

Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada junto com uma representação de Grassmann em ρ_0 com respeito a r_0 , digamos $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$. Seja $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$ e um levantamento Z de X dado.

Definição B.5. *O par (X, Z) está em **boa posição** com respeito à representação de Grassmann dada, se existe um vetor unitário $\xi \in \mathcal{H}$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$.
- (2) ξ realiza a norma de Z^2 , ou seja, $\phi(Z^2)\xi = -\lambda^2\xi$, $\lambda = |Z|$.
- (3) $r_0(\xi) = \xi$, $r_0(\phi(Z)\xi) = -\phi(Z)\xi$.

Notemos que, por causa da condição (2) acima temos $\lambda = |Z| = \|\phi(Z)\xi\|$.

Lema B.6. *Dada uma representação de Grassmann $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ de \mathcal{P} em ρ_0 com respeito a r_0 , e um par (X, Z) ($X \neq 0$) que está em boa posição com respeito a esta representação, então $F_\xi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$ leva a curva do grupo uni-paramétrico $\gamma(t) = L_{e^{tZ}}\rho_0$ na geodésica $w(t) = F_\xi(\gamma(t))$ na esfera \mathcal{S} . Mais ainda, o comprimento de $w(t)$ desde 0 até $0 < t \leq \frac{\pi}{2|Z|}$ coincide com o comprimento de $\gamma(t)$, ou seja, $\ell_0^t w = t|Z|$.*

Demonstração. Consideremos $\mu > 0$ e $\eta \in \mathcal{H}$ com $\|\eta\| = 1$ tal que $\phi(Z)\xi = \mu\eta$. Temos,

$$\begin{aligned} -\lambda^2 &= -\lambda^2 \langle \xi, \xi \rangle = \langle -\lambda^2 \xi, \xi \rangle = \langle \phi(Z^2)\xi, \xi \rangle = \langle \phi(ZZ)\xi, \xi \rangle &= \langle \phi(Z)\phi(Z)\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \phi(Z)\xi, \phi(Z)^*\xi \rangle &= \langle \phi(Z)\xi, \phi(Z^*)\xi \rangle \\ &= -\langle \phi(Z)\xi, \phi(Z)\xi \rangle &= -\langle \mu\eta, \mu\eta \rangle \\ &= -\mu^2 \langle \eta, \eta \rangle &= -\mu^2. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda = \mu$. Vejamos que $\phi(Z)$ deixa invariante o subespaço bi-dimensional Δ gerado por ξ e η , assim como seu complemento ortogonal Δ^\perp já que $\phi(Z)\xi = \mu\eta = \lambda\eta$ e

$$\phi(Z)\eta = \phi(Z) \left(\frac{\phi(Z)\xi}{\lambda} \right) = \frac{\phi(Z)^2\xi}{\lambda} = \frac{\phi(Z^2)\xi}{\lambda} = -\frac{\lambda^2\xi}{\lambda} = -\lambda\xi.$$

Portanto,

$$\phi(Z)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta) = \alpha_1\phi(Z)\xi + \alpha_2\phi(Z)\eta = \alpha_1\lambda\eta - \alpha_2\lambda\xi \in \Delta$$

para todo $\alpha_1\xi + \alpha_2\eta \in \Delta$ e com isto para todo $y \in \Delta^\perp$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \phi(Z)y \rangle &= \langle \phi(Z)^*(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta), y \rangle = \langle \phi(Z^*)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta), y \rangle \\ &= -\langle \phi(Z)(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta), y \rangle \\ &= -\langle \alpha_1\lambda\eta - \alpha_2\lambda\xi, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

para todo $\alpha_1\xi + \alpha_2\eta \in \Delta$, ou seja, $\phi(Z)y \in \Delta^\perp$.

O conjunto $B = \{\xi, \eta\}$ forma uma base ortonormal para Δ e como $\phi(Z)\xi = \lambda\eta$ e $\phi(Z)\eta = -\lambda\xi$ a matriz M de $\phi(Z)$ com respeito à base B é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Devido a que (X, Z) está em boa posição com respeito à representação de Grassmann temos que $r_0(\xi) = \xi$ e $r_0(\eta) = r_0\left(\frac{\phi(Z)\xi}{\lambda}\right) = -\frac{\phi(Z)\xi}{\lambda} = -\eta$. A reflexão r_0 deixa invariante Δ e Δ^\perp , e sua restrição a Δ tem matriz R_0 com respeito à base B :

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $w(t) = F_\xi(\gamma(t)) = F(\gamma(t))\xi = \phi(e^{tZ})r_0\phi(e^{-tZ})\xi = e^{t\phi(Z)}r_0e^{-t\phi(Z)}\xi$ e para facilitar as contas vamos usar a representação matricial com respeito à base B . Calculemos primeiro e^{tM}

$$\begin{aligned} e^{tM} &= 1 + t \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}^3 + \dots \\ &= I_0 + (\lambda t)J_0 - \frac{(\lambda t)^2}{2}I_0 - \frac{(\lambda t)^3}{3!}J_0 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\lambda t)^{2n} I_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\lambda t)^{2n+1} J_0 \\ &= \cos(\lambda t)I_0 + \sin(\lambda t)J_0 \end{aligned}$$

em que

$$I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e disto podemos concluir que

$$e^{-tM} = \cos(\lambda t)I_0 - \sin(\lambda t)J_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& e^{tM} R_0 e^{-tM} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\cos(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\lambda t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\cos(\lambda t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sin(\lambda t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \sin(\lambda t) \\ -\sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ -\sin(\lambda t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\lambda t) - \sin^2(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \cos(\lambda t) + \cos(\lambda t) \sin(\lambda t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\lambda t) \\ \sin(2\lambda t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e portanto $w(t) = \cos(2\lambda t)\xi + \sin(2\lambda t)\eta$. Assim, $w(t)$ é uma geodésica na esfera \mathcal{S} .

Finalmente calculemos o comprimento de $w(s)$ desde $s = 0$ até $s = t$,

$$\begin{aligned}
\ell_0^t w &= \int_0^t \|\dot{w}(s)\|_{w(s)} ds = \int_0^t \frac{1}{2} \|\dot{w}(s)\| ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} \|-2\lambda \sin(2\lambda s)\xi + 2\lambda \cos(2\lambda s)\eta\| ds \\
&= \int_0^t \frac{1}{2} (2\lambda) ds \\
&= t\lambda \\
&= t|Z|.
\end{aligned}$$

□

Teorema B.7. Dada uma representação de Grassmann $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ de \mathcal{A} em ρ_0 com respeito a r_0 , e um par (X, Z) ($X \neq 0$) que está em boa posição com respeito a esta representação, defina $\gamma(t) = L_{e^{tZ}} \rho_0$. Então $\gamma(t)$ minimiza comprimento entre os pontos $\rho_0 = \gamma(0)$ e $\gamma(t)$ se

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2|Z|}.$$

Neste caso,

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = \ell_0^t \gamma = t|Z|.$$

Demonstração. Consideremos a curva $\delta(s)$ em \mathcal{P} com $0 \leq s \leq t$ que liga $\rho_0 = \gamma(0)$ e $\gamma(t)$, para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2|Z|}$. Consideremos $v(s) = F_\xi(\delta(s))$ e $w(s) = F_\xi(\gamma(s))$. Estas curvas unem $\xi = w(0)$ a $w(t)$. Temos as seguintes desigualdades:

1. $\ell_0^t w \leq \ell_0^t v$ se $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2|Z|}$, pois w é uma geodésica na variedade de Riemann \mathcal{S} .
2. $\ell_0^t \delta \geq \ell_0^t v$, pois F_ξ reduz comprimento de acordo ao Corolário B.4.

Observemos que $\ell_0^t \gamma = \ell_0^t w$ pelo Lema B.6. Então combinando essas observações obtemos

$$\ell_0^t \gamma = \ell_0^t w \leq \ell_0^t v \leq \ell_0^t \delta.$$

□

B.3.2 Uma condição geométrica alternativa suficiente para minimalidade

Aqui apresentamos um teorema similar ao Teorema B.7, acerca de curvas do grupo uni-paramétrico que são mínimas.

Definição B.8. *Seja $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$. Dizemos que uma representação $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ da álgebra- C^* \mathcal{A} é **adaptada** a X se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) *Existe um levantamento mínimo Z de X .*
- (2) *Existe um vetor unitário $\xi \in \mathcal{H}$ o qual é um autovetor que realiza a norma de $\phi(Z^2)$, isto é,*

$$\phi(Z^2)\xi = -\lambda^2\xi \quad \text{com} \quad \lambda = |Z|.$$

- (3) *Para cada $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ o vetor $\phi(b)\xi \in \mathcal{H}$ é ortogonal a $\phi(Z)\xi$.*

Diremos que um tal Z é **adaptado** a X .

Notemos que na definição anterior a representação pode não ser injetiva.

Teorema B.9. *Dada $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ uma representação de \mathcal{A} adaptada a $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$, então a curva do grupo uni-paramétrico $\gamma(t) = L_{e^{tZ}}\rho_0$ minimiza comprimento até $t = \frac{\pi}{2\|X\|_{\rho_0}}$ para qualquer Z adaptado a X .*

Demonstração. Definamos a reflexão r_0 em \mathcal{H} como segue,

$$r_0(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{se } \zeta \in S_{\rho_0}, \\ -\zeta & \text{se } \zeta \in S_{\rho_0}^\perp, \end{cases}$$

em que S_{ρ_0} é o fecho do espaço vetorial gerado por $\Omega = \{\zeta \in \mathcal{H}; \zeta = \phi(b)\xi, \phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})\}$. Observemos que o comutante de r_0 contém $\phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$. De fato, provemos que o conjunto Ω é invariante sob $\phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$. Sejam $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ e $\zeta \in \Omega$, então $\zeta = \phi(c)\xi$ com $\phi(c) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$. Logo,

$$\phi(b)\zeta = \phi(b)\phi(c)\xi = \phi(bc)\xi \in \Omega$$

e portanto S_{ρ_0} e $S_{\rho_0}^\perp$ também são invariantes sob $\phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$. Em consequência, ϕ é uma representação de Grassmann em ρ_0 com respeito a r_0 .

A seguir observemos que o par (X, Z) está em boa posição com respeito a r_0 na representação ϕ . Com efeito, é suficiente ver que $\phi(Z)\xi \in S_{\rho_0}^\perp$. Mas para cada $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ temos $\langle \phi(b)\xi, \phi(Z)\xi \rangle = 0$, o qual mostra que $\phi(Z)\xi$ é ortogonal a Ω e portanto a S_{ρ_0} . Agora a prova segue do Teorema B.7. \square

B.4 O teorema de minimalidade

Na seção anterior, assumimos que uma representação de Grassmann de \mathcal{A} , e os teoremas de minimalidade nela, dependem da função equivariante $F : \mathcal{P} \rightarrow Gr(\mathcal{H})$ dada pela representação. Agora chegamos a um dos principais teoremas do artigo estudado neste apêndice, o qual dá uma condição intrínseca para minimalidade. A prova, contudo, baseia-se na construção de uma representação e uma reflexão isotrópica a fim de aplicar os teoremas da seção anterior.

Para encontrar uma representação de \mathcal{A} adaptada ao vetor tangente $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$, precisamos estados da álgebra \mathcal{A} “adaptados” a X .

Consideremos o estado $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ da álgebra \mathcal{A} dada pelo vetor ξ na Definição B.8,

$$\varphi(a) = \langle \phi(a)\xi, \xi \rangle,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Com este estado φ , definimos o produto interno em \mathcal{A} ,

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \varphi(a_2^* a_1) = \langle \phi(a_1)\xi, \phi(a_2)\xi \rangle.$$

Observação B.10. A segunda condição da Definição B.8, isto é, existe um vetor unitário $\xi \in \mathcal{H}$ que é um autovetor que realiza a norma de $\phi(Z^2)$, ou seja,

$$\phi(Z^2)\xi = -\lambda^2\xi \quad \text{com} \quad \lambda = |Z|$$

é equivalente à condição

$$Z^2 + \lambda^2 \mathbb{1} \in \text{Ker}\varphi, \quad \lambda = |Z|.$$

Com efeito, o elemento simétrico $Z^2 + \lambda^2 \mathbb{1}$ é positivo porque $|Z|^2 = \lambda^2$. Então $(\phi(Z^2) + \lambda^2 \mathbb{1})\xi = 0$ é equivalente a

$$\langle (\phi(Z^2) + \lambda^2 \mathbb{1})\xi, \xi \rangle = 0$$

Observação B.11. A terceira condição na Definição B.8, a saber, para cada $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ o vetor $\phi(b)\xi \in \mathcal{H}$ é ortogonal a $\phi(Z)\xi$, isto é,

$$\langle \phi(b)\xi, \phi(Z)\xi \rangle = 0,$$

para todo $\phi(b) \in \phi(\mathcal{U}_{\rho_0})$ é equivalente à condição: para cada $b \in \mathcal{U}_{\rho_0}$, $Zb \in \text{Ker}\varphi$.

De fato, observemos que

$$\varphi(Zb) = \langle \phi(Zb)\xi, \xi \rangle = -\langle \phi(b)\xi, \phi(Z)\xi \rangle.$$

As Observações B.10 e B.11 nos conduzem à definição abaixo.

Definição B.12. Seja $X \in T_{\rho_0} \mathcal{P}$. Dizemos que um estado φ é **adaptado** ao vetor tangente X se ele admite um levantamento Z tal que

- (1) $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$.
- (2) $Z^2 + \lambda^2 \mathbb{1} \in \text{Ker}\varphi$, $\lambda = |Z|$.
- (3) Para cada $b \in \mathcal{U}_{\rho_0}$, $Zb \in \text{Ker}\varphi$.

Claramente ter uma representação de \mathcal{A} adaptada ao vetor X é equivalente à existência de um estado φ adaptado ao vetor X .

A seguir enunciaremos uma proposição útil para o qual necessitamos alguma notação. Fixemos $Z \in \mathcal{A}^{ant}$, definamos $M = \{b_1 Z + Z b_2 \in \mathcal{A}; b_1, b_2 \in \mathcal{B}_{\rho_0}\}$. Note que a parte simétrica de M é

$$M^{sim} = \{bZ - Zb^*; b \in \mathcal{B}_{\rho_0}\} = \{bZ + Zb; b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}\}.$$

Observemos que a condição (2) na definição anterior é equivalente a exigir que $M^{sim} \subset \text{Ker}\varphi$, pois \mathcal{U}_{ρ_0} gera linearmente \mathcal{B}_{ρ_0} e $\text{Ker}\varphi$ é fechado-*.

Denotemos por S o subespaço real de \mathcal{A}^{sim} gerado pelo subconjunto M^{sim} e o elemento $Z^2 + \lambda^2 \mathbb{1}$ em \mathcal{A} com $\lambda = |Z|$.

Proposição B.13. *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada sobre o grupo unitário da álgebra C^* \mathcal{A} . Seja X um vetor tangente de \mathcal{P} e seja $Z \in \mathcal{A}^{ant}$ um levantamento de X . Então com a notação anterior, as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) *Existe uma representação de \mathcal{A} adaptada a X .*
- (2) *Existe um estado φ adaptado ao vetor X .*
- (3) *S não contém elementos invertíveis positivos de \mathcal{A} .*
- (4) $|Z^2| \leq |Z^2 + m|$, para todo $m \in M^{sim}$.

Demonstração. Ver [9] (Proposition 5.2) □

A última ferramenta da qual precisamos para provar o teorema principal é o seguinte resultado de convexidade.

Lema B.14. *No contexto anterior suponha que $|(Z + b)^2| \geq |Z^2|$ para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}$. Então $|Z^2| \leq |Z^2 + bZ + Zb|$, para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}$.*

Este lema tem uma interpretação geométrica simples que é ilustrada na Figura B.1 baseada no fato de que a expressão $bZ + Zb$ é a derivada em $t = 0$ da expressão $(Z + tb)^2$.

Demonstração. Considere para $t > 0$ a função a valores de \mathcal{A} $h(t) = Z^2 + \frac{(Z+tb)^2 - Z^2}{t}$. Primeiro mostremos que $|h(t)| \geq |Z^2|$. Supondo o contrário, que $|h(t)| < |Z^2|$, então a combinação convexa $th(t) + (1-t)Z^2$ tem norma $|th(t) + (1-t)Z^2| < |Z^2|$ para todo $0 < t < 1$. Note que

$$th(t) + (1-t)Z^2 = tZ^2 + (Z + tb)^2 - Z^2 + (1-t)Z^2 = (Z + tb)^2.$$

Então obtemos $|(Z + tb)^2| < |Z^2|$ que contradiz a hipótese. Observe que $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = Z^2 + bZ + Zb$. Considere a desigualdade $|h(t)| \geq |Z^2|$ e tomando o limite quando $t \rightarrow 0$ obtemos $|Z^2 + bZ + Zb| \geq |Z^2|$ como desejávamos. □

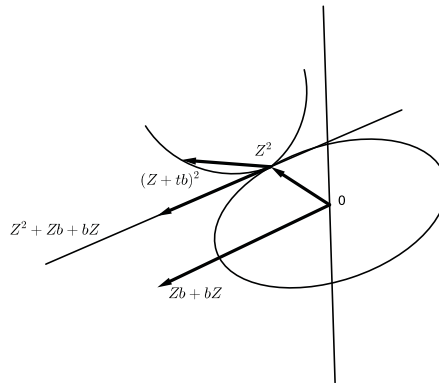


Figura B.1: O ponto $Z^2 + bZ + Zb$ se encontra fora da esfera de raio $|Z^2|$.

Teorema B.15. *Seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada. Considere $\rho \in \mathcal{P}$ e $X \in T_\rho \mathcal{P}$. Suponha que existe $Z \in \mathcal{A}^{ant}$ o qual é um levantamento mínimo de X . Então a curva do grupo uni-paramétrico $\gamma(t) = L_{e^{tZ}} \rho_0$ tem comprimento mínimo na classe de todas as curvas em \mathcal{P} unindo $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$ para cada t com $|t| \leq \frac{\pi}{2|Z|}$.*

Demonstração. Pelo Teorema B.9 é suficiente mostrar que existe alguma representação de \mathcal{A} adaptada a X . Pela hipótese temos que $|Z + b| \geq |Z|$, para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$. Tanto Z como b são anti-simétricos em \mathcal{A} então a condição $|Z + b| \geq |Z|$ para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$ é equivalente a $|(Z + b)^2| \geq |Z^2|$ para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$. Do Lema B.14 obtemos $|Z^2| \leq |Z^2 + bZ + Zb|$, para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$. Portanto, da Proposição B.13 temos que existe alguma representação de \mathcal{A} adaptada a X . \square

B.5 Existência de curvas mínimas com velocidade inicial dada

Agora consideramos a questão da existência de curvas com um vetor velocidade inicial X dado. Do Teorema B.15, necessitamos saber que existe um levantamento Z que é mínimo, ou seja, $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$ ou equivalentemente $|Z + b| \geq |Z|$ para todo $b \in \mathcal{B}_{\rho_0}^{ant}$. No caso em que \mathcal{A} é uma álgebra de Von Neumann (álgebra- W^*), a existência de tal levantamento mínimo está garantida e isto será demonstrado no Teorema B.18.

Precisaremos um teorema sobre a minimalidade da norma. Suponha que \mathcal{A} é uma álgebra- W^* fracamente fechada. Observemos que as partes simétrica e antissimétrica de \mathcal{A} e \mathcal{B} também são fracamente fechadas (ver [17] p.14).

Teorema B.16. *Suponha que \mathcal{A} é uma álgebra- W^* e que \mathcal{B} é uma subálgebra- W^* de \mathcal{A} fracamente fechada. No espaço quociente $\mathcal{A}^{sim}/\mathcal{B}^{sim}$, a norma (quociente) de cada classe é realizada por algum elemento desta classe.*

Demonstração. Seja $Z \in \mathcal{A}^{sim}$ e para todo número natural n , seja $b_n \in \mathcal{B}^{sim}$ tal que

1. $|Z + b_n|$ é uma sequência decrescente de números.
2. Se $z = \inf_{b \in \mathcal{B}^{sim}} |Z + b|$ é a norma da classe de Z no quociente $\mathcal{A}^{sim}/\mathcal{B}^{sim}$, então

$$z \leq |Z + b_n| \leq z + \frac{1}{n}. \quad (\text{B.1})$$

O conjunto dos b_n é limitado por

$$|b_n| \leq |Z + b_n| + |Z| \leq z + 1 + |Z|,$$

assim este conjunto é fracamente compacto. Então existe $b \in \mathcal{B}^{sim}$ que está no fecho fraco de qualquer cauda $\{b_k; k \geq n\}$. A partir disto é claro que $Z + b \in \mathcal{B}^{sim}$ está no fecho fraco de qualquer cauda $D_n = \{Z + b_k; k \geq n\}$. O teorema será provado uma vez mostrado que $|Z + b| = z$. Suponhamos que $|Z + b| > z$, de modo que existe um número natural n_0 tal que $|Z + b| > z + \frac{1}{n_0}$. Denotemos por \mathcal{A}_* um pre-dual da álgebra- W^* \mathcal{A} . Então,

$$|Z + b| = \sup_{\substack{\eta \in \mathcal{A}_* \\ |\eta|=1}} |\langle \eta, Z + b \rangle|,$$

em que $\langle \eta, Z + b \rangle$ indica o valor de $Z + b$ em η . Podemos escolher $\xi \in \mathcal{A}_*$ de norma um, tal que

$$|Z + b| \geq |\langle \xi, Z + b \rangle| > z + \frac{1}{n_0}.$$

Agora como $Z + b$ está no fecho fraco das caudas D_n para qualquer número natural n , então dado $\varepsilon > 0$ existem números n arbitrariamente grandes tais que

$$||\langle \xi, Z + b \rangle| - |\langle \xi, Z + b_n \rangle|| < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos encontrar algum $n > n_0$ tal que $|\langle \xi, Z + b_n \rangle|$ seja maior que $z + \frac{1}{n_0}$. Mas $|Z + b_n| \geq |\langle \xi, Z + b_n \rangle|$ e obtemos que $|Z + b_n| > z + \frac{1}{n_0} > z + \frac{1}{n}$ que contradiz a desigualdade (B.1) acima. \square

Portanto, o seguinte corolário é imediato.

Corolário B.17. *Suponha que \mathcal{A} é uma álgebra- W^* e que \mathcal{B} é uma subálgebra- W^* de \mathcal{A} fracamente fechada. No espaço quociente $\mathcal{A}^{sim}/\mathcal{B}^{sim}$, a norma (quociente) de cada classe é atingida por algum elemento desta classe.*

Teorema B.18. *Seja \mathcal{A} uma álgebra- W^* , e seja \mathcal{P} uma bandeira generalizada do grupo unitário de \mathcal{A} . Seja $X \in T_\rho \mathcal{P}$. Então existe um levantamento mínimo Z de X , e portanto a curva do grupo uni-paramétrico $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$ tem comprimento mínimo em \mathcal{P} entre todas as curvas unindo $\gamma(0)$ e $\gamma(t)$, para cada t com $|t| \leq \frac{\pi}{2|Z|}$.*

Demonstração. Do Corolário B.17 obtemos que existe um levantamento Z de X que satisfaz $|Z| = \|X\|_{\rho_0}$. A minimalidade da curva do grupo uni-paramétrico segue do Teorema B.15. \square

Deste modo, para álgebras de Von Neumann, para cada “direção” $X \in T_\rho \mathcal{P}$ ($\|x\|_\rho = 1$) existe uma curva do grupo uni-paramétrico $\gamma(t) = L_{e^{tz}}\rho$, $\dot{\gamma}(0) = X$, a qual é uma curva mínima para comprimento até $\pi/2$. Notemos que devido à falta de convexidade estrita da norma pode haver outras geodésicas com os mesmos vetores velocidade inicial.